

**Corso di Laurea Magistrale in Fisica  
Università della Calabria**

**RACCOLTA PROVE D'ESAME  
DI MECCANICA QUANTISTICA AVANZATA  
(MECCANICA QUANTISTICA 2 dall'A.A. 2011/12)**

**Alessandro Papa**

**February 21, 2017**

## **Ringraziamenti**

Si ringraziano Lorenzo Barca, Valentina Cairo, Andrea Caputo, Salvatore Cardaci, Giuseppe Callea, Vincenzo Catanzaro, Francesco Cosco, Vincenzo Denisi, Christian Gencarelli, Lucantonio Mustica, Elisa Napoli, Vincenzo Panebianco, Giuseppe Prete, Mattia Stefano e Caterina Tone per la segnalazione di errori di stampa.

**Prova finale, 22 marzo 2004**

1. (a) Due particelle identiche con spin  $1/2$  hanno impulsi  $\vec{p}_a$  e  $\vec{p}_b$ . Scrivere la funzione d'onda che descrive il sistema nei casi di spin totale pari a zero e di spin totale pari ad 1 con terza componente uguale a zero.  
(b) Due particelle identiche con spin 2 e terza componente dello spin uguale a zero si trovano in uno stato descritto da una funzione d'onda orbitale simmetrica. Dire quali sono i possibili valori dello spin totale del sistema, giustificando la risposta.
  
2. Scrivere tutti gli elementi di matrice diversi da zero della prima componente dell'operatore di dipolo elettrico,  $ex$ , per le transizioni tra livelli  $(n = 2, l = 1)$  e  $(n = 3, l = 2)$  dell'atomo di idrogeno, in termini di un solo elemento di matrice dell'operatore  $ez$  (si consideri l'atomo di idrogeno in approssimazione non-relativistica).

## I prova di recupero, 14 luglio 2004

- (a) Tre particelle identiche di spin  $1/2$  e di massa  $m$ , non interagenti, vincolate a muoversi lungo una retta, sono soggette ad un potenziale armonico con costante di richiamo  $k$ . Si determini l'energia dello stato fondamentale del sistema e si scriva la funzione d'onda corrispondente.  
(b) Il potenziale tra due particelle identiche con spin  $1/2$  ha la forma

$$V = V_0 + V_1 \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 ,$$

dove  $V_0$  e  $V_1$  sono costanti. Calcolare il valor medio di tale potenziale nei due seguenti casi:

- (i) su uno stato in cui la funzione d'onda è simmetrica rispetto allo scambio delle coordinate spaziali;
  - (ii) su uno stato in cui la funzione d'onda è anti-simmetrica rispetto allo scambio delle coordinate spaziali.
- Scrivere tutte le componenti del tensore sferico di rango due che si può costruire a partire dalle coordinate  $(x, y, z)$  dell'operatore posizione.

[Dato:  $Y_{\pm 2}^2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi}$ ,  $Y_{\pm 1}^2 = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi}$ ,  $Y_0^2 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$ . ]

## II prova di recupero, 6 ottobre 2004

1. Si consideri un oscillatore armonico isotropo in **due** dimensioni. L'Hamiltoniana è data da

$$H_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) .$$

- (a) Quali sono le energie del livello fondamentale e del I livello eccitato? C'è degenerazione?  
(b) Si consideri ora il sistema perturbato con un potenziale

$$V = \epsilon m\omega^2 xy , \quad \epsilon \ll 1 .$$

Si calcoli lo spostamento energetico al prim'ordine per il livello fondamentale e per il I livello eccitato. Si determinino anche le corrispondenti autofunzioni dell'energia all'ordine più basso.

- (c) Il sistema descritto dall'Hamiltoniana  $H_0 + V$  può essere risolto **esattamente**, mediante un opportuno cambio di coordinate. Si confronti il calcolo perturbativo con la soluzione esatta.

2. Si calcolino i seguenti elementi di matrice (o valori medi), spiegando quali di essi danno risultato nullo per motivi di simmetria:

- (a) atomi di idrogeno non-relativistico:  $\langle n = 2, l = 1, m = 0 | x | n = 2, l = 0, m = 0 \rangle$   
(b)  $\langle L_z \rangle$  per un elettrone in un qualsiasi campo con simmetria centrale con  $j = 9/2, m = 7/2, l = 4$ .  
(c)  $\langle \text{singoletto}, m_s = 0 | (S_z^{(e^-)} - S_z^{(e^+)}) | \text{tripletto}, m_s = 0 \rangle$  per lo stato di positronio in onda-s.

**Prova finale, 14 aprile 2005**

1. Si consideri l'Hamiltoniana di un oscillatore armonico unidimensionale perturbata con il termine  $\lambda x$ . Si calcoli lo spostamento del livello fondamentale al II ordine in teoria delle perturbazioni e si confronti con il risultato esatto.

[Si ricorda che  $a = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(x + ip/(m\omega))$ .]

2. Un particella ha momento angolare orbitale  $l$  e spin  $1/2$ . Si calcoli il valor medio di  $S_z$  su tutti i possibili stati di definito momento angolare totale  $j$  della particella.
3. Si dica quali sono gli elementi di matrice non nulli dell'operatore  $z$  tra gli stati dell'atomo di idrogeno con  $n = 3$  ( $z$  è la terza componente del vettore posizione relativa dell'elettrone rispetto al protone). Si giustifichino le risposte date e si spieghi se, ed eventualmente come, il risultato trovato è rilevante per lo studio dell'effetto Stark lineare sull'atomo di idrogeno.

## I prova di recupero, 13 luglio 2005

1. Si consideri l'Hamiltoniana di un oscillatore armonico unidimensionale perturbata con il termine  $\lambda x^2$ . Si calcoli lo spostamento del livello fondamentale al I ordine in teoria delle perturbazioni e si confronti con il risultato esatto.

[Si ricorda che  $a = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(x + ip/(m\omega))$ .]

2. Un particella ha momento angolare orbitale  $l$  e spin  $1/2$ . Si calcoli il valor medio di  $l_z$  su tutti i possibili stati di definito momento angolare totale  $j$  della particella.
3. Si considerino due particelle non interagenti, ciascuna di massa  $m$ , in una buca di potenziale unidimensionale infinita di estremi  $x = 0$  ed  $x = a$ . Una di esse sia nello stato fondamentale, l'altra nel primo stato eccitato. Calcolare il valor medio di  $(x_1 - x_2)^2$ , assumendo che le particelle siano (a) distinguibili, (b) bosoni, (c) fermioni.

[Si ricorda che le autofunzioni normalizzate per la buca di potenziale unidimensionale infinita con estremi in  $x = 0$  ed  $x = a$  sono date da

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad ]$$

## II prova di recupero, 7 settembre 2005

1. Si calcolino gli spostamenti energetici al I ordine in teoria delle perturbazioni del livello  $n = 2$  dell'atomo di idrogeno non-relativistico soggetto a perturbazione della forma  $V = \lambda x$ , con  $\lambda$  costante e "piccolo" (rispetto a cosa?).
2. Un particella ha momento angolare orbitale  $l$  e spin  $1/2$ . Si calcoli il valor medio di  $S_z$  su tutti i possibili stati di definito momento angolare totale  $j$  della particella.
3. Si considerino due particelle non interagenti, ciascuna di massa  $m$ , soggette a potenziale armonico unidimensionale con pulsazione  $\omega$ . Una di esse sia nello stato fondamentale, l'altra nel primo stato eccitato. Calcolare il valor medio di  $(x_1 - x_2)^2$ , assumendo che le particelle siano (a) distinguibili, (b) bosoni, (c) fermioni.



## Prova finale, 11 aprile 2006

1. Siano  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  e  $\psi_3$  tre stati ortogonali di un fermione. Consideriamo ora un sistema di due fermioni identici e chiamiamo  $\Phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , lo stato di questi due fermioni in cui  $\psi_i$  non sia occupato (per esempio, lo stato  $\Phi_1$  è quello in cui i due fermioni si trovano negli stati  $\psi_2$  e  $\psi_3$ ). In altri termini, l'indice  $i$  è un indice di "lacuna".

Detta  $B$  un'osservabile della forma

$$B = A(\vec{x}_1) + A(\vec{x}_2) ,$$

dove  $\vec{x}_i$  è la coordinata dell' $i$ -esimo fermione, si calcoli il valore medio di  $B$  su ciascuno degli stati  $\Phi_i$ . Si dia un'interpretazione fisica del risultato ottenuto.

2. Un atomo di idrogeno viene posto in un campo elettrico  $\vec{E}$  sovrapposto ad un campo magnetico  $\vec{B}$ , entrambi uniformi e costanti nel tempo. Si determini come viene separato il livello  $n = 2$ , al prim'ordine in teoria delle perturbazioni, nei seguenti due casi:
  - $\vec{E}$  parallelo a  $\vec{B}$ ;
  - $\vec{E}$  ortogonale a  $\vec{B}$ .

Si ignorino, per semplicità, gli effetti di spin e le correzioni relativistiche.

## I prova di recupero, 17 luglio 2006

1. Si consideri l'Hamiltoniana di un oscillatore armonico unidimensionale perturbata con il termine  $\lambda\hat{p}/m$ , dove  $\hat{p} = -i\hbar d/dx$  è l'operatore impulso. Si determini lo spostamento di ciascun livello e la corrispondente autofunzione perturbata al primo ordine perturbativo non nullo. Si confronti con il risultato esatto.

[15 punti]

*Facoltativo:* si generalizzi il risultato ad un qualunque sistema unidimensionale che presenti uno spettro discreto.

*Suggerimenti:*

$$a = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(x + ip/(m\omega)) ;$$
$$(\hat{p} + \lambda)\left(e^{-i\lambda x/\hbar} \psi(x)\right) = e^{-i\lambda x/\hbar}\left(\hat{p} \psi(x)\right) .$$

2. Sia dato un sistema di  $N$  fermioni identici non interagenti, soggetti a potenziale armonico. Dette  $E_n$  e  $\{\psi_n(x)\}$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ , le energie e le rispettive autofunzioni per il sistema di singola particella, si determinino le energie e le rispettive autofunzioni relative al livello fondamentale, al I livello eccitato e al II livello eccitato del sistema degli  $N$  fermioni identici, indicando la degenerazione di ciascun livello.

Si perturbi ora l'Hamiltoniana del sistema con un termine di interazione della forma

$$\lambda \sum_{i,j;i \neq j}^N \delta(x_i - x_j) .$$

Si determini lo spostamento dei primi tre livelli energetici al I ordine in teoria delle perturbazioni e si commenti il risultato.

[15 punti]

3. Dato un sistema di due particelle, si verifichi che il momento angolare orbitale totale  $\vec{l}_1 + \vec{l}_2$ , con  $\vec{l}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1$  e  $\vec{l}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$ , può essere scritto nella forma  $\vec{L} + \vec{l}$ , dove  $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$  e  $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ , essendo  $(\vec{R}, \vec{P})$  e  $(\vec{r}, \vec{p})$  la posizione e l'impulso del centro di massa e del moto relativo, rispettivamente.

Si faccia vedere che se le due particelle sono identiche e senza spin, il momento angolare orbitale relativo può assumere solo numeri quantici  $l=0, 2, 4, \dots$

[6 punti]

## II prova di recupero, 13 settembre 2006

1. Sia dato un sistema di tre fermioni identici non interagenti, confinati su un segmento di retta con estremi 0 e  $a$ . Dette  $E_n$  e  $\{\psi_n(x)\}$ ,  $n=1, 2, \dots$ , le energie e le rispettive autofunzioni per il sistema di singola particella, si determinino le energie e le rispettive autofunzioni relative al livello fondamentale, al I livello eccitato e al II livello eccitato del sistema, indicando la degenerazione di ciascun livello.

Si perturbi ora l'Hamiltoniana del sistema con un termine di interazione della forma

$$\lambda \sum_{i,j;i \neq j}^3 \delta(x_i - x_j) .$$

e si determini lo spostamento dei primi tre livelli energetici al I ordine in teoria delle perturbazioni.

**[15 punti]**

2. Si scrivano tutti gli elementi di matrice non nulli dell'operatore  $xy$  tra lo stato con  $n = 1$  e gli stati con  $n = 3$  dell'atomo di idrogeno non-relativistico, in termini di un elemento di matrice dell'operatore  $z^2$ . Si calcoli, poi, esplicitamente quest'ultimo elemento di matrice.

**[10 punti]**

3. Si calcoli il valor medio di  $l_z$  e quello di  $s_z$  su uno stato con  $j = 7/2$ ,  $j_z = 3/2$  ed  $l = 3$ ,  $s = 1/2$ .

**[5 punti]**

Prova finale, 28 marzo 2007

1. Due particelle identiche di spin  $1/2$  sono vincolate a muoversi lungo una retta sotto l'effetto di un potenziale armonico con pulsazione  $\omega$  e non interagiscono tra di loro. Se una di esse si trova nello stato fondamentale e l'altra nel I stato eccitato, calcolare il valor medio dell'operatore  $\hat{x}_1\hat{x}_2$ , dove  $x_{1,2}$  sono le posizioni delle particelle, nei casi di spin totale in uno stato di tripletto o di singoletto. In quale dei due casi  $\langle \hat{x}_1\hat{x}_2 \rangle$  risulta essere maggiore? Si poteva prevedere il risultato?

[8 punti]

2. L'Hamiltoniana di un atomo di idrogeno non-relativistico è modificata con l'aggiunta della perturbazione

$$V = \frac{V_0}{a^2} \hat{x}\hat{y} ,$$

dove  $a$  è il raggio di Bohr e  $V_0$  è una costante. Nell'ipotesi che  $V_0$  sia piccolo (rispetto a cosa?), studiare l'effetto della perturbazione sui livelli  $n = 1$  ed  $n = 2$ , calcolando i livelli energetici perturbati al I ordine e i corrispondenti autostati.

Prima di iniziare il calcolo, indicare quali elementi di matrice risulteranno non nulli, motivando la risposta. Per il calcolo degli elementi di matrice non nulli, utilizzare l'identità

$$\langle n, l, m = 0 | r^2 | n, l, m = 0 \rangle = \frac{n^2}{2} [5n^2 + 1 - 3l(l + 1)] a^2 .$$

[12 punti]

3. È noto che, per effetto delle correzioni relativistiche al I ordine perturbativo, i livelli energetici di un atomo di idrogeno non-relativistico subiscono uno spostamento che dipende solo dal numero quantico di momento angolare totale  $j$ , oltre che dal numero quantico principale  $n$ . Se si sottopone un atomo di idrogeno ad un campo magnetico uniforme  $\vec{B} = (0, 0, B)$ , è necessario aggiungere all'Hamiltoniana il termine di interazione

$$V = \frac{e}{2m_e c} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B} .$$

Se il campo magnetico è sufficientemente debole da poter considerare  $V$  come una perturbazione rispetto all'Hamiltoniana dell'atomo di idrogeno comprensiva delle correzioni relativistiche al I ordine, calcolare gli spostamenti energetici indotti da  $V$  al I ordine perturbativo sugli stati con  $n = 2$ .

[10 punti]

## I prova di recupero, 18 luglio 2007

1. Una particella di massa  $m$  è libera di muoversi all'interno di un quadrato che giace sul piano  $XY$ , i cui vertici si trovano nelle posizioni  $(0,0)$ ,  $(a,0)$ ,  $(0,a)$  e  $(a,a)$ . Scrivere le energie e le corrispondenti autofunzioni dello stato fondamentale e del I stato eccitato, discutendo l'eventuale degenerazione. Si studi al I ordine l'effetto di una perturbazione del tipo  $V(x,y) = A\delta(x - a/4)\delta(y - 3a/4)$ .

[Si ricorda che le autofunzioni per una buca di potenziale unidimensionale infinita di estremi 0 ed  $a$  sono date da

$$\psi_n^{(0)}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e che i rispettivi autovalori sono  $E_n^{(0)} = n^2h^2/(8ma^2)$ , con  $n = 1,2,3 \dots$

[10 punti]

2. Si dica quali sono gli elementi di matrice non nulli della perturbazione  $V = Axz$  tra gli stati del livello  $n = 2$  dell'atomo di idrogeno non-relativistico e li si metta in relazione tra di loro. Si determinino poi gli autostati imperturbati che diagonalizzano la perturbazione.

[N.B.: non viene richiesto il calcolo degli spostamenti energetici al I ordine.]

[10 punti]

3. Due particelle identiche di spin  $1/2$  sono vincolate a muoversi lungo l'asse  $x$ . Le loro funzioni d'onda sono le seguenti:

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{a}} & -\frac{a}{4} \leq x \leq \frac{3a}{4} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$
$$\psi_2(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{a}} & -\frac{3a}{4} \leq x \leq \frac{a}{4} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Dette  $x_1$  e  $x_2$  le posizioni delle due particelle, si calcoli il valor medio di  $(x_1 - x_2)^2$  quando il sistema si trova nello stato di singoletto oppure in uno degli stati di tripletto di spin.

[10 punti]

## II prova di recupero, 12 settembre 2007

1. Una particella è vincolata sul segmento  $0 \leq x \leq a$  ed è soggetta al potenziale repulsivo  $V(x) = \lambda\delta(x - a/2)$ ,  $\lambda > 0$ . Considerando  $V(x)$  come una perturbazione, calcolare lo spostamento energetico al I ordine perturbativo dello stato fondamentale e del primo stato eccitato. Mostrare che esiste un valore di  $\lambda$  per il quale i due livelli perturbati risultano degeneri e dire se ciò è accettabile.

[Si ricorda che le autofunzioni per una buca di potenziale unidimensionale infinita di estremi 0 ed  $a$  sono date da

$$\psi_n^{(0)}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e che i rispettivi autovalori sono  $E_n^{(0)} = n^2h^2/(8ma^2)$ , con  $n = 1, 2, 3 \dots$ ]

[8 punti]

2. Si consideri un atomo di idrogeno sottoposto ad un campo elettrico uniforme (effetto Stark). Nell'ipotesi in cui il potenziale di interazione,  $V = -eEz$  ( $e < 0$  è la carica dell'elettrone), possa essere trattato come una perturbazione, se ne consideri l'effetto al I ordine perturbativo sul livello  $n = 3$ : si individuino gli elementi di matrice non nulli della perturbazione, li si metta in relazione tra di loro per quanto possibile e si discuta in che misura è rimossa la degenerazione.

[N.B.: non viene richiesto il calcolo esplicito degli elementi di matrice.]

[Suggerimento: Si ordinino le righe e le colonne della matrice della perturbazione in modo tale che essa risulti diagonale a blocchi.]

[12 punti]

3. Due particelle identiche di spin 1 sono vincolate a muoversi lungo l'asse  $x$ . Le loro funzioni d'onda sono le seguenti:

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{a}} & -\frac{a}{3} \leq x \leq \frac{2a}{3} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$
$$\psi_2(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{a}} & -\frac{2a}{3} \leq x \leq \frac{a}{3} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Dette  $x_1$  e  $x_2$  le posizioni delle due particelle, si calcoli il valor medio di  $(x_1 - x_2)^2$  a seconda dello stato di spin totale del sistema e si discuta il risultato ottenuto.

[10 punti]

Prova finale, 22 aprile 2008

1. (a) L'Hamiltoniana non-relativistica dell'atomo di idrogeno è data da

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}, \quad \alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}.$$

Gli autovalori di  $H_0$  sono

$$E_n^{(0)} = -\frac{m\alpha^2}{2n^2\hbar^2}, \quad n = 1, 2, \dots;$$

le corrispondenti autofunzioni sono della forma  $\psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_m^l(\theta, \phi)$ .

Ricordando che

$$R_{21}(r) = \frac{a^{-3/2}}{2\sqrt{6}} \frac{r}{a} e^{-r/2a}, \quad R_{20}(r) = \frac{a^{-3/2}}{2\sqrt{2}} \left(2 - \frac{r}{a}\right) e^{-r/2a},$$

dove  $a = (\hbar^2/m)(4\pi\epsilon_0/e^2)$  è il raggio di Bohr, si verifichi esplicitamente nel caso  $n = 2$  che valgono le seguenti formule:

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{an^2}, \quad \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{1}{a^2 n^3 (l + 1/2)}, \quad \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \frac{1}{a^3 n^3 l (l + 1/2) (l + 1)}, \quad (l \neq 0).$$

[8 punti]

(b) Si consideri ora l'Hamiltoniana dell'atomo di idrogeno in presenza delle correzioni relativistiche fino all'ordine  $1/c^2$ , data da

$$H = H_0 + V,$$

dove

$$V = -\frac{(\vec{p}^2)^2}{8m^3c^2} + \frac{\alpha}{2m^2r^3c^2} \vec{L} \cdot \vec{S} + \frac{\alpha\pi\hbar^2}{2m^2c^2} \delta(\vec{r}),$$

Sul livello  $n = 2$  si calcoli dapprima l'effetto della perturbazione dovuta al solo termine di interazione spin-orbita (il secondo termine di  $V$ ). Successivamente, si calcoli l'effetto degli altri due termini.

Suggerimento: conviene riscrivere il primo termine di  $V$  utilizzando la formula

$$\vec{p}^2 = 2m \left( H_0 + \frac{\alpha}{r} \right).$$

[12 punti]

2. Due particelle identiche di spin  $1/2$ , vincolate a muoversi lungo l'asse  $x$ , interagiscono secondo il potenziale

$$V = A(x_1 - x_2)^2 \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2,$$

dove  $A$  è una costante positiva.

Si determinino autovalori ed autofunzioni dell'Hamiltoniana del sistema.

[10 punti]

## I prova di recupero, 9 luglio 2008

1. (a) Siano  $\vec{S}_1$  e  $\vec{S}_2$  due operatori di spin e sia  $\vec{J}$  l'operatore di spin totale,  $\vec{J} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ . Applicando il teorema della proiezione, scrivere l'espressione per il valor medio dell'operatore  $S_{1,z} - S_{2,z}$  su un generico stato di definito spin totale,  $|j, m\rangle$ .

[6 punti]

- (b) Due particelle distinguibili di spin  $1/2$  interagiscano secondo l'Hamiltoniana

$$H = A\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + B(S_{1,z} - S_{2,z}),$$

con  $A$  e  $B$  costanti reali.

- Trattando il secondo termine di  $H$  come una perturbazione, calcolare lo spostamento dei livelli energetici del sistema imperturbato al I ordine in teoria perturbativa.
- Confrontare il risultato ottenuto con quello esatto.

[12 punti]

2. Due particelle identiche di spin 0 siano vincolate all'interno del segmento  $0 \leq x \leq a$  da un potenziale con pareti infinitamente alte in  $x = 0$  e  $x = a$ .

- Trovare le autofunzioni e gli autovalori dell'energia relativi allo stato fondamentale e ai primi due livelli eccitati.
- Supponendo che i due bosoni interagiscano attraverso il potenziale perturbativo  $V = -aV_0\delta(x_1 - x_2)$ , determinare al I ordine in teoria perturbativa lo spostamento dei primi tre livelli energetici.

[Le autofunzioni normalizzate di una particella sono  $\psi_n(x) = \sqrt{2/a} \sin(n\pi x/a)$ , per  $0 \leq x \leq a$ ; le corrispondenti energie  $E_n = n^2\pi^2\hbar^2/(2ma^2)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ]

[12 punti]



## II prova di recupero, 17 settembre 2008

1. L'Hamiltoniana di interazione tra lo spin del protone e quello dell'elettrone in un atomo di idrogeno è data da

$$H' = \frac{\mu_0 g e^2}{8\pi m_p m_e} \frac{[3(\vec{S}_p \cdot \hat{r})(\vec{S}_e \cdot \hat{r}) - \vec{S}_p \cdot \vec{S}_e]}{r^3} + \frac{\mu_0 g e^2}{3m_p m_e} (\vec{S}_p \cdot \vec{S}_e) \delta^{(3)}(\vec{r}),$$

dove  $\mu_0$  è la permeabilità magnetica del vuoto,  $g \simeq 5.59$  è il rapporto giromagnetico del protone,  $\vec{r}$  è il vettore posizione relativa dell'elettrone rispetto al protone e  $\hat{r}$  è il versore  $\vec{r}/r$ . Si vuole calcolare l'effetto di  $H'$  sullo fondamentale dell'atomo di idrogeno in teoria perturbativa al I ordine.

- (a) Dimostrare, innanzitutto, che il valor medio del primo termine di  $H'$  è nullo sullo stato fondamentale, come su ogni stato con  $l = 0$ .

[Suggerimento: verificare che

$$\int (\vec{S}_p \cdot \hat{r})(\vec{S}_e \cdot \hat{r}) d\Omega = \frac{4\pi}{3} \vec{S}_p \cdot \vec{S}_e,$$

dove  $d\Omega$  è l'elemento di angolo solido.]

- (b) Sapendo che  $|\psi_{100}(0)|^2 = 1/(\pi a^3)$ , dove  $\psi_{100}(\vec{r})$  è la parte spaziale dell'autofunzione dell'atomo di idrogeno imperturbato (cioè la parte senza lo spin) e  $a = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me^2) \simeq 0.529 \times 10^{-10}\text{m}$  è il raggio di Bohr, far vedere che l'interazione  $H'$  rimuove la degenerazione di spin dello stato fondamentale e determinare la lunghezza d'onda (in cm) della radiazione emessa in seguito a transizioni tra i due nuovi livelli energetici.

[Dati numerici:  $m_p \simeq 938 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_e \simeq 511 \text{ keV}/c^2$ ; si ricordi poi che  $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ . ]

[15 punti]

2. L'Hamiltoniana di un atomo di idrogeno non-relativistico è modificata con l'aggiunta della perturbazione

$$V = \frac{V_0}{a^2} (\hat{x}^2 - \hat{y}^2),$$

dove  $a$  è il raggio di Bohr e  $V_0$  è una costante. Nell'ipotesi che  $V_0$  sia piccolo (rispetto a cosa?), calcolare gli spostamenti energetici al I ordine in teoria perturbativa sui livelli  $n = 1$  ed  $n = 2$ .

Si usi il teorema di Wigner-Eckart per minimizzare il numero di integrali da calcolare.

[15 punti]

**Prova finale, 26 marzo 2009**

1. Si perturbi l'Hamiltoniana di una particella di massa  $m$  in una buca di potenziale unidimensionale infinita di estremi  $x = 0$  ed  $x = a$  mediante un potenziale di intensità costante  $V$  su un intervallo di ampiezza  $L$  centrato intorno ad  $x = a/2$ .

Si determini al I ordine in teoria perturbativa lo spostamento dei livelli energetici e la correzione delle autofunzioni.

Nei due casi limite  $L \rightarrow 0$  e  $L \rightarrow a$ , si confrontino i risultati ottenuti con il calcolo esatto. Si verifichi, inoltre, che quando  $L \rightarrow 0$  e  $V \rightarrow \infty$ , con  $LV \rightarrow A = \text{costante}$ , i risultati coincidono con quelli ottenuti con una perturbazione della forma  $A\delta(x - a/2)$ .

[Si ricorda che, per il sistema in oggetto, i livelli energetici imperturbati sono dati da

$$E_n^{(0)} = n^2 \frac{h^2}{8ma^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

mentre le autofunzioni normalizzate sono

$$\psi_n^{(0)}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad ]$$

**[12 punti]**

2. Si classifichino gli autostati del livello  $n = 3$  dell'atomo di idrogeno non-relativistico come autostati simultanei degli operatori  $\vec{J}^2$ ,  $J_z$ ,  $\vec{L}^2$ ,  $\vec{S}^2$  e si calcoli su ciascuno di essi il valor medio degli operatori  $L_z$  ed  $S_z$ .

**[8 punti]**

3. Si considerino due particelle identiche di massa  $m$  e di spin  $1/2$ , in una buca di potenziale unidimensionale infinita di estremi  $x = 0$  ed  $x = a$ . Trascurando ogni interazione dovuta allo spin, si determinino il livello fondamentale e il primo livello eccitato e le relative autofunzioni, discutendone l'eventuale degenerazione. Si calcoli, poi, al I ordine in teoria perturbativa lo spostamento di questi livelli energetici dovuto ad un potenziale generico della forma  $V(x_1 - x_2)$ .

**[10 punti]**

## I prova di recupero, 15 luglio 2009

1. Data l'Hamiltoniana dell'atomo di elio

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} - \frac{2}{r_1} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} - \frac{2}{r_2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|},$$

si consideri il termine di interazione tra i due elettroni come perturbazione e si calcoli (in eV) il livello fondamentale dell'atomo di elio al prim'ordine in teoria perturbativa. Si discuta poi il confronto del risultato ottenuto con il dato sperimentale di  $-78.96$  eV.

[Suggerimento: nel calcolare  $\langle 1/|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \rangle$ , si effettui prima l'integrazione su  $\vec{r}_2$  tenendo il vettore  $\vec{r}_1$  fissato e orientato lungo l'asse polare; si faccia attenzione al fatto che  $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 \cdot r_2}$  deve essere sempre una quantità positiva.]

[Dati: la funzione d'onda dello stato fondamentale di un atomo idrogenoide con numero atomico  $Z$  è data da

$$\psi_{100}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{Z}{a} \right)^{3/2} e^{-Zr/a},$$

con  $a$  il raggio di Bohr, mentre

$$E_1 = -\frac{m}{2\hbar^2} \left( Z \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z^2}{2a}.$$

è la corrispondente energia.]

**[15 punti]**

2. Si consideri un ipotetico atomo di elio, in cui ciascun elettrone sia rimpiazzato da una particella di spin 1 con carica negativa. Discutere per questo ipotetico atomo la struttura dello stato fondamentale e la sua eventuale degenerazione.

**[7 punti]**

3. Dato un atomo di idrogeno non-relativistico ed indicato con la consueta notazione  $|n, l, m\rangle$  un generico autostato dell'Hamiltoniana, si supponga di conoscere il seguente valor medio:

$$Q \equiv e \langle 2, 1, 1 | (3z^2 - r^2) | 2, 1, 1 \rangle,$$

detto *momento di quadrupolo*. Si esprimano tutti gli elementi di matrice del tipo

$$e \langle 2, l', m' | (x^2 - y^2) | 2, l, m \rangle,$$

in termini di  $Q$ .

[Dati:  $Y_{\pm 2}^2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi}$ ,  $Y_{\pm 1}^2 = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi}$ ,  $Y_0^2 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$ .]

**[8 punti]**

## II prova di recupero, 17 settembre 2009

1. Due bosoni identici si trovano in una buca di potenziale unidimensionale di altezza infinita e di estremi  $x = 0$  e  $x = a$ .

(a) Ignorando qualunque interazione tra i due bosoni, si trovino il livello fondamentale e il I livello eccitato del sistema e le rispettive autofunzioni.

(b) Si assuma adesso che i due bosoni interagiscano debolmente, attraverso il potenziale

$$V(x_1, x_2) = -aV_0\delta(x_1 - x_2)$$

e si determini all'ordine perturbativo più basso lo spostamento dei primi due livelli energetici.

[Si ricorda che le autofunzioni normalizzate per una particella in una buca di potenziale unidimensionale infinita con estremi in  $x = 0$  ed  $x = a$  sono date da

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad ]$$

[10 punti]

2. Si consideri un elettrone soggetto ad un potenziale armonico isotropo in **due** dimensioni. L'Hamiltoniana è data da

$$H_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

(a) Quali sono le energie del livello fondamentale e del I livello eccitato? C'è degenerazione?

(b) Si sottoponga il sistema ad un debole campo elettrico uniforme  $E$  lungo la direzione  $x$  e si calcoli lo spostamento energetico al prim'ordine del livello fondamentale e del I livello eccitato.

(c) Si confrontino i risultati ottenuti con il calcolo esatto.

[Si ricorda che per un oscillatore armonico unidimensionale  $a = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(x + ip_x/(m\omega))$ .]

[12 punti]

3. Dato un atomo di idrogeno non-relativistico ed indicato con la consueta notazione  $|n, l, m\rangle$  un generico autostato dell'Hamiltoniana, si supponga di conoscere il seguente valor medio:

$$Q \equiv e\langle 3, 2, 2|(3z^2 - r^2)|3, 2, 2\rangle,$$

detto *momento di quadrupolo*. Si esprimano tutti gli elementi di matrice del tipo

$$e\langle 3, 2, m'|xy|3, 2, m\rangle,$$

in termini di  $Q$ .

[Dati:  $Y_{\pm 2}^2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}$ ,  $Y_{\pm 1}^2 = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{\pm i\varphi}$ ,  $Y_0^2 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1)$ .]

[8 punti]

**Prova finale, 30 marzo 2010**

1. Si vuole schematizzare l'interazione di van der Waals tra due atomi neutri. Per questo motivo, si ammetta che i due atomi si trovino a distanza  $R$  uno dall'altro e si modellizzi ogni atomo come un elettrone di massa  $m$  e carica  $-e$  attaccato mediante una molla di costante elastica  $k$  ad un nucleo di carica  $e$ , supposto infinitamente massivo e quindi statico.

L'Hamiltoniana del sistema imperturbato risulta pertanto essere

$$H_0 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_2^2 ,$$

dove  $x_1$  e  $x_2$  sono le posizioni di ciascun elettrone relativamente al nucleo dell'atomo di appartenenza.

L'interazione coulombiana tra i due atomi è data da

$$V = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R+x_1} - \frac{1}{R-x_2} + \frac{1}{R+x_1-x_2} \right) .$$

- (a) Spiegare l'espressione per  $V$ .  
(b) Mostrare che, supposti  $|x_1|$  e  $|x_2|$  molto minori di  $R$ , l'interazione si semplifica a

$$V \simeq -\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{x_1 x_2}{R^3} .$$

(c) Calcolare in teoria delle perturbazioni al II ordine lo spostamento del livello fondamentale del sistema.

(d) Confrontare con il calcolo esatto (*suggerimento*: passare alle variabili  $x_{\pm} = (x_1 \pm x_2)/\sqrt{2}$  e  $p_{\pm} = (p_1 \pm p_2)/\sqrt{2}$ ).

[Dato: per un oscillatore armonico unidimensionale  $a = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(x + ip/(m\omega))$ .]

**[18 punti]**

2. Un atomo di idrogeno al centro di una cella cubica di un cristallo costituito da ioni alternativamente positivi e negativi è soggetto alla perturbazione

$$V = \frac{V_0}{a^3}xyz ,$$

con  $a$  il raggio di Bohr.

- (a) Mostrare che i livelli  $n = 1$  ed  $n = 2$  non sono spostati dalla perturbazione  $V$  al I ordine in teoria perturbativa.  
(b) Spiegare l'espressione per  $V$ .

**[12 punti]**

**Appello straordinario, 15 giugno 2010**

1. L'atomo di deuterio è costituito da un elettrone e da un nucleo (il deutone), formato da un protone e da un neutrone. Poiché il deutone ha un momento di quadrupolo non nullo, il potenziale cui è soggetto l'elettrone contiene, oltre al termine Coulombiano, anche un termine di quadrupolo, che può essere trattato come una perturbazione:

$$V = V_{\text{Coulomb}} + V_{\text{quad}} = -\frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0)r} + A \frac{r^2 - 3z^2}{r^5},$$

dove  $A$  è una costante piccola (rispetto a cosa?).

- (a) Dimostrare che il livello fondamentale ( $n=1$ ) non viene modificato al prim'ordine in teoria perturbativa.  
 (b) Elencare gli elementi di matrice non nulli di  $V_{\text{quad}}$  tra gli stati con  $n = 2$ .  
 (c) Calcolare al prim'ordine perturbativo gli spostamenti energetici del livello  $n=2$ .

[Dati: le funzioni d'onda del sistema imperturbato sono della forma

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_m^l(\theta, \phi).$$

Per  $n=2$  abbiamo:

$$R_{20}(r) = \frac{1}{(2a)^{3/2}} \left(2 - \frac{r}{a}\right) e^{-r/(2a)}, \quad R_{21}(r) = \frac{1}{(2a)^{3/2}} \frac{r}{a\sqrt{3}} e^{-r/(2a)},$$

con  $a$  il raggio di Bohr e

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_0^1 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{\pm 1}^1 = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}. \quad ]$$

**[18 punti]**

2. Si consideri un sistema di due particelle identiche *libere* di massa  $m$ . Per semplicità si assuma che esse si muovono in una dimensione e si trascuri il loro spin. Ciascuna delle due particelle è descritta da una funzione d'onda reale,

$$\psi_{\pm}(x) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{\beta}{2}(x \mp a)^2\right].$$

Si tratta di due funzioni d'onda centrate nei punti  $x = \pm a$  e, per  $\beta \gg 1/a^2$ , ben localizzate.

- (a) Scrivere la funzione d'onda *normalizzata* del sistema nel caso che le due particelle siano bosoni o fermioni.  
 (b) Calcolare il valor medio dell'energia totale del sistema

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m}$$

e confrontare il risultato con quello per particelle distinguibili.

- (c) Dopo aver definito la *forza efficace*  $F = -\partial\langle H \rangle/\partial a$ , verificare che, per particelle ben localizzate, essa è attrattiva nel caso bosonico e repulsiva in quello fermionico.

**[12 punti]**

## I prova di recupero, 14 luglio 2010

1. L'atomo di deuterio è costituito da un elettrone e da un nucleo (il deutone), formato da un protone e da un neutrone. Poiché il deutone ha un momento di quadrupolo non nullo, il potenziale cui è soggetto l'elettrone contiene, oltre al termine Coulombiano, anche un termine di quadrupolo, che può essere trattato come una perturbazione:

$$V = V_{\text{Coulomb}} + V_{\text{quad}} = -\frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0)r} + A \frac{r^2 - 3z^2}{r^5},$$

dove  $A$  è una costante piccola (rispetto a cosa?).

(a) Per calcolare gli spostamenti energetici del livello  $n = 3$  al prim'ordine perturbativo è necessario calcolare tutti gli elementi di matrice del tipo  $\langle 3, l', m' | V_{\text{quad}} | 3, l, m \rangle$ . Elencare (senza calcolarli) quali di questi elementi di matrice, in base al teorema di Wigner-Eckart e alla parità, sono non nulli e dire quali elementi di matrice ridotti servono.

(b) Determinare uno degli elementi di matrice ridotti di cui al punto precedente.

(c) Dire in quanti sottolivelli si separa il livello  $n = 3$  e con quale degenerazione (non occorre calcolare alcune elemento di matrice; si assuma che non ci siano coincidenze accidentali per i vari sottolivelli).

[Dati: le funzioni d'onda del sistema imperturbato sono della forma

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_m^l(\theta, \phi).$$

Una delle  $R_{nl}$  è

$$R_{32}(r) = \frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}} \frac{1}{(3a)^{3/2}} \frac{r^2}{a^2} e^{-r/(3a)},$$

con  $a$  il raggio di Bohr. ]

[18 punti]

2. Si consideri un sistema di due elettroni, vincolati a muoversi in una dimensione, che si trovano in uno stato di spin totale  $S = 1$ . Gli elettroni interagiscono secondo un potenziale

$$V(x_1, x_2) = \begin{cases} \infty, & |x_1 - x_2| > a \\ 0, & |x_1 - x_2| \leq a \end{cases}$$

Trovare lo stato di energia più bassa quando il momento totale è nullo.

[12 punti]

## II prova di recupero, 16 settembre 2010

1. Una particella di spin  $1/2$  è soggetta a potenziale armonico tridimensionale con pulsazione  $\omega$ . L'Hamiltoniana del sistema è perturbata da un termine della forma

$$V = \lambda \vec{r} \cdot \vec{s},$$

dove  $\lambda$  è una costante piccola (rispetto a cosa?).

Calcolare al second'ordine in teoria delle perturbazioni lo spostamento dello stato fondamentale.

[8 punti]

2. Il positronio è un sistema simile all'idrogeno ed è formato da un elettrone e da un positrone. Si consideri il positronio nel suo stato fondamentale,  $l = 0$ . L'Hamiltoniana totale di questo sistema può essere scritta nella forma

$$H = H_0 + H_S + H_B,$$

dove  $H_0$  descrive l'interazione Coulombiana tra elettrone e positrone,  $H_S = A \vec{s}_e \cdot \vec{s}_p$  è la parte di interazione tra gli spin e  $H_B = -(\vec{\mu}_e + \vec{\mu}_p) \cdot \vec{B}$  è la parte di interazione con un campo magnetico esterno uniforme  $\vec{B}$ .

(a) Supposto  $\vec{B} = 0$ , dire qual è il modo più conveniente di scrivere gli autostati imperturbati del sistema e calcolare lo spostamento dello stato fondamentale dovuto al termine  $H_S$ .

(b) Applicando un campo magnetico debole (tale che  $H_B \ll H_S$ ) determinare al prim'ordine in teoria delle perturbazioni lo spostamento dei livelli del sistema descritto dall'Hamiltoniana  $H_0 + H_S$ .

(c) Supposto ora che il campo magnetico sia sufficientemente intenso da rendere  $H_S$  trascurabile rispetto ad  $H_B$ , ma pur sempre tale da consentire di trattare  $H_B$  come una perturbazione, dire qual è ora il modo più conveniente di scrivere gli autostati imperturbati del sistema e calcolare lo spostamento dello stato fondamentale dovuto al termine  $H_B$ .

[12 punti]

3. Si consideri un sistema di due elettroni, vincolati a muoversi in una dimensione, che si trovano in uno stato di spin totale  $S = 0$ . Gli elettroni interagiscono secondo un potenziale  $V(x_1, x_2) = m\omega^2(x_1 - x_2)^2/2$ . Trovare lo stato di energia più bassa quando il momento totale è nullo.

[10 punti]



## Appello straordinario, 17 novembre 2010

1. Si consideri una perturbazione della forma

$$V = Ayz, \quad A \text{ costante positiva,}$$

sul livello  $n = 3$  dell'atomo di idrogeno.

(a) Si elenchino gli elementi di matrice non nulli di  $V$ .

(b) Si dica quanti elementi di matrice ridotti è necessario conoscere per determinare tutti gli elementi di matrice di cui al punto (a).

(c) Si calcoli il rapporto

$$\frac{\langle 3, 2, 2 | V | 3, 2, 1 \rangle}{\langle 3, 2, -1 | V | 3, 2, 0 \rangle}.$$

[10 punti]

2. Un oscillatore armonico tridimensionale isotropo (massa  $m$ , carica  $q$ , pulsazione  $\omega$ ) sia sottoposto a un debole campo elettrico uniforme diretto lungo  $z$ .

Calcolare al prim'ordine non nullo l'effetto della perturbazione sul livello fondamentale del sistema.

[10 punti]

3. Si consideri un sistema di due elettroni, soggetti ad un certo potenziale centrale, e si assuma che esistono solo tre stati di singola particella disponibili,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  e  $\psi_3$ .

(a) Scrivere tutte le possibili funzioni d'onda  $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  per il sistema dei due elettroni.

(b) Se i due elettroni interagiscono mediante un potenziale della forma  $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$ , calcolare (fin dove possibile) l'elemento di matrice di  $V$  tra due qualunque funzioni d'onda distinte di cui al punto precedente.

[10 punti]

**Prova finale, 29 marzo 2011**

1. L'Hamiltoniana di un atomo di idrogeno in presenza di campo magnetico è data da (unità cgs)

$$H = H_0 + H_B + H_{SF} ,$$

dove

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} ,$$

$$H_B = -\frac{e}{2mc} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B} ,$$

$$H_{SF} = -\frac{(\vec{p}^2)^2}{8m^3c^2} + \frac{e^2}{2m^2r^3c^2} \vec{L} \cdot \vec{S} + \frac{e^2\pi\hbar^2}{2m^2c^2} \delta(\vec{r}) .$$

Calcolare esplicitamente l'effetto Zeeman sul livello  $n = 2$  nel limite di Paschen-Back, cioè considerando  $H_{SF}$  come perturbazione di  $H_0 + H_B$ .

Dati utili:

- gli autovalori di  $H_0$  sono

$$E_n^{(0)} = -\frac{me^4}{2n^2\hbar^2} , \quad n = 1, 2, \dots$$

e le corrispondenti autofunzioni sono della forma  $\psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_m^l(\theta, \phi)$ , con

$$R_{21}(r) = \frac{a^{-3/2}}{2\sqrt{6}} \frac{r}{a} e^{-r/2a} , \quad R_{20}(r) = \frac{a^{-3/2}}{2\sqrt{2}} \left(2 - \frac{r}{a}\right) e^{-r/2a} ,$$

dove  $a = \hbar^2/(me^2)$  è il raggio di Bohr,

- valgono i seguenti valori medi

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{an^2} , \quad \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{1}{a^2n^3(l+1/2)} , \quad \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \frac{1}{a^3n^3l(l+1/2)(l+1)} , \quad (l \neq 0) .$$

- il primo termine di  $H_{SF}$  può essere riscritto nella forma

$$\vec{p}^2 = 2m \left( H_0 + \frac{e^2}{r} \right) .$$

**[18 punti]**

2. Tre particelle identiche di spin 0 non interagenti siano soggette ad un potenziale centrale. Ciò comporta che gli stati di energia e momento angolare definito possono essere presi come base per gli stati del sistema di ciascuna particella.

(a) Se tutte e tre le particelle hanno la stessa energia e numero quantico orbitale  $l_i = 1$ , determinare il numero di stati indipendenti in cui possono trovarsi.

(b) Dimostrare che il sistema non potrà mai trovarsi in uno stato con numero quantico di momento angolare totale  $l_{\text{tot}} = 0$ .

**[12 punti]**

## II prova finale, 24 giugno 2011

1. Si consideri l'atomo di idrogeno, tenendo conto del fatto che anche il protone è dotato di spin  $1/2$  e ha fattore giromagnetico  $g_p = 5.58$  (si ricordi che  $\vec{\mu}_p = g_p e_p / (2m_p) \vec{s}_p$ ).
  - i) Trascurando ogni interazione fra i momenti magnetici dell'elettrone e del protone, si dica quanto vale la degenerazione dei livelli energetici.
  - ii) Si immerga poi l'atomo in un campo magnetico uniforme  $\vec{B}$ , sufficientemente debole da poter trattare in modo perturbativo il suo effetto, ma tale da rendere trascurabili gli effetti relativistici. Si discuta come viene rimossa la degenerazione degli stati  $n = 1$ .

[10 punti]

2. Dire quali dei seguenti elementi di matrice tra stati stazionari dell'atomo di idrogeno non-relativistico sono diversi da zero:

$$\langle 3, l', m' | (x^2 - y^2) | 2, l, m \rangle .$$

Mettere poi in relazione tra di loro, ove possibile, gli elementi di matrice non nulli.

[10 punti]

3. Si considerino due particelle identiche, immerse in un campo esterno e non interagenti. Le loro funzioni d'onda orbitali siano date da  $\psi_{n_1}(\vec{x})$  e  $\psi_{n_2}(\vec{x})$ . Sapendo che entrambe le particelle hanno spin  $s$ , si determini il numero di stati indipendenti, nel caso in cui le due particelle siano bosoni o fermioni. Trattare a parte il caso in cui i numeri quantici  $n_1$  ed  $n_2$  sono eguali.

[10 punti]

## I prova di recupero, 20 luglio 2011

1. Si consideri l'atomo di idrogeno nel quale, per semplicità, lo spin dell'elettrone sia sistematicamente ignorato. Si assuma il fatto (spiegato dalla meccanica quantistica relativistica) che i livelli energetici 2s e 2p non sono perfettamente degeneri, essendo il primo superiore in energia della quantità corrispondente a 1057.7 MHz (Lamb shift).

(i) L'atomo viene immerso in un campo magnetico uniforme di modulo  $B$ , diretto lungo l'asse  $z$ ; per quale valore  $B_d \neq 0$  di  $B$  si crea degenerazione tra livelli con  $n = 2$  e quali sono gli stati corrispondenti?

(ii) Fissato il modulo del campo magnetico al valore  $B_d$ , l'atomo è sottoposto ad un campo elettrico uniforme di modulo  $E = 10 \text{ V cm}^{-1}$ , diretto lungo l'asse  $x$ ; dopo aver giustificato che l'effetto del campo elettrico può essere trattato come una perturbazione degli spostamenti indotti dal campo magnetico, dire come si spostano i livelli energetici con  $n = 2$  all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni.

[10 punti]

2. Dire quali dei seguenti elementi di matrice tra stati stazionari dell'atomo di idrogeno non-relativistico sono diversi da zero:

$$\langle 3, l', m' | xy | 2, l, m \rangle .$$

Mettere poi in relazione tra di loro, ove possibile, gli elementi di matrice non nulli.

[10 punti]

3. Dire quali valori può assumere lo spin totale  $S$  di due bosoni identici di spin  $s$  su stati a momento orbitale relativo definito e pari a  $l$ . Si studi in particolare il caso in cui  $s = 0$ . Ripetere l'esercizio per due fermioni identici.

[10 punti]

Prova finale, 16 febbraio 2012

1. Si calcolino in teoria perturbativa all'ordine  $1/c^2$  gli spostamenti del livello fondamentale e del primo livello eccitato di un oscillatore armonico unidimensionale dovuti alla correzione relativistica dell'energia cinetica. Si calcoli anche lo spostamento al I ordine dello stato fondamentale del sistema perturbato.

[Si ricorda che  $a = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(x + ip/(m\omega))$ .]

[10 punti]

2. Un deutone (uno stato legato composto da un protone e da un neutrone) nello stato fondamentale possiede un momento di quadrupolo elettrico piccolo, ma non nullo,

$$\langle Q \rangle = \langle e(2z^2 - x^2 - y^2) \rangle \approx 0.0027 \times 10^{-24} e \cdot \text{cm}^2 .$$

Dimostrare che il dato sperimentale implica che lo stato fondamentale non può essere uno stato di pura onda  $S$ , cioè con  $l = 0$ .

[10 punti]

3. Calcolare la sezione d'urto totale per la diffusione di particelle di bassa energia da un potenziale con simmetria sferica della forma

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases}$$

con  $V_0$  costante positiva.

*Suggerimenti:* si ricordi che

- i) l'equazione di Schrödinger per la componente in onda  $l$  si scrive

$$\varphi_l'' + \frac{2}{r}\varphi_l' + \left[ k^2 - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \varphi_l = 0 ,$$

dove  $k^2 = 2mE/\hbar^2$  e  $U(r) = 2mV(r)/\hbar^2$ ;

- ii) la soluzione dell'equazione per  $U(r)=0$  è data da

$$\varphi_l(r) = e^{i\delta_l} [\cos \delta_l j_l(kr) - \sin \delta_l n_l(kr)] ,$$

- iii) per piccoli  $x$  vale

$$j_l(x) \sim \frac{x^l}{(2l+1)!!} , \quad n_l(x) \sim -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}} ,$$

- iv) la sezione d'urto totale è data da

$$\sigma_{\text{tot}}(k) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l(k) .$$

[10 punti]

## I prova di recupero, 19 giugno 2012

1. Si calcoli in teoria perturbativa all'ordine  $1/c^2$  lo spostamento del livello fondamentale di un oscillatore armonico tridimensionale isotropo dovuto alla correzione relativistica dell'energia cinetica.

[Si ricorda che  $a = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(x + ip/(m\omega))$ .]

[10 punti]

2. Si considerino gli elementi di matrice dell'operatore

$$V = f(r) xy ,$$

con  $f(r)$  una generica funzione della coordinata radiale  $r$ , sugli stati con  $n = 3$  di un atomo di idrogeno non-relativistico.

Dire quali tra i seguenti rapporti di elementi di matrice sono calcolabili senza fare uso della funzione  $f(r)$  e determinarli:

$$R_1 = \frac{\langle 3, 2, -1 | V | 3, 2, 1 \rangle}{\langle 3, 1, 1 | V | 3, 1, -1 \rangle} , \quad R_2 = \frac{\langle 3, 2, 1 | V | 3, 1, -1 \rangle}{\langle 3, 1, 1 | V | 3, 1, -1 \rangle} , \quad R_3 = \frac{\langle 3, 2, 1 | V | 3, 2, -1 \rangle}{\langle 3, 2, 0 | V | 3, 2, 2 \rangle} .$$

[10 punti]

3. Stimare la sezione d'urto totale per la diffusione di particelle di bassa energia (solo onda  $S$ ) da un potenziale con simmetria sferica della forma

$$V = V_0 r_0 \delta(r - r_0) .$$

con  $V_0$  costante positiva (potenziale repulsivo) o negativa (potenziale attrattivo).

*Suggerimenti:* si ricordi che

- i) l'equazione di Schrödinger per la componente in onda  $l$  si scrive

$$\varphi_l'' + \frac{2}{r}\varphi_l' + \left[ k^2 - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \varphi_l = 0 ,$$

dove  $k^2 = 2mE/\hbar^2$  e  $U(r) = 2mV(r)/\hbar^2$ ;

- ii) la soluzione dell'equazione per  $U(r)=0$  è data da

$$\varphi_l(r) = e^{i\delta_l} [\cos \delta_l j_l(kr) - \sin \delta_l n_l(kr)] ,$$

- iii) per piccoli  $x$  vale

$$j_l(x) \sim \frac{x^l}{(2l+1)!!} , \quad n_l(x) \sim -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}} ,$$

- iv) la sezione d'urto totale è data da

$$\sigma_{\text{tot}}(k) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l(k) .$$

[10 punti]

## I prova finale, 6 febbraio 2013

1. Si calcoli  $\langle S_z \rangle$  su un autostato simultaneo dell'Hamiltoniana non-relativistica dell'atomo di idrogeno e degli operatori  $\vec{J}^2, J_z, \vec{l}^2, l_z$ . Si semplifichi il risultato il più possibile.

[10 punti]

2. Un atomo di trizio (elettrone più nucleo fatto da un protone e due neutroni) si trova nel suo stato fondamentale quando, a un certo istante, uno dei neutroni subisce un decadimento- $\beta$  per effetto del quale l'atomo si trasforma nello ione  ${}^3\text{He}^+$  (elettrone più nucleo fatto da due protoni e un neutrone). Usando la teoria perturbativa dipendente dal tempo al I ordine, calcolare la probabilità che il sistema si trovi nello stato fondamentale dello ione  ${}^3\text{He}^+$ .  
[Dato: la funzione d'onda dello stato fondamentale di un atomo idrogenoide con numero atomico  $Z$  è

$$\psi_{100}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-Zr/a_0},$$

dove  $a_0$  è il raggio di Bohr.]

[10 punti]

3. Per la diffusione di bassa energia (solo onda  $s$ ) da un potenziale con simmetria sferica della forma

$$V = V_0 r_0 \delta(r - r_0),$$

con  $V_0$  costante positiva, si sa che la fase di diffusione  $\delta_0$  soddisfa l'equazione

$$\cot \delta_0 = -\cot(kr_0) - \frac{\hbar^2 k}{2mV_0 r_0} \frac{1}{\sin^2(kr_0)}.$$

Calcolare la sezione d'urto nel limite  $V_0 \rightarrow \infty$ , assumendo che  $\cot(kr_0)$  sia diverso da zero. Confrontare il risultato ottenuto con quello di diffusione da sfera impenetrabile di raggio  $r_0$  e commentare.

La condizione  $\cot \delta_0 = 0$  viene detta di "risonanza". Si giustifichi questa denominazione e si trovino i due valori più piccoli di  $k$  per i quali si realizza, tenendo solo i termini fino all'ordine  $1/V_0$ .

[10 punti]

## II prova finale, 19 febbraio 2013

1. Dato l'operatore

$$V = f(r) xz ,$$

con  $f(r)$  una generica funzione della coordinata radiale  $r$ , si calcolino i seguenti rapporti tra elementi di matrice fra stati con  $n = 3$  di un atomo di idrogeno non-relativistico:

$$R_1 = \frac{\langle 3, 2, -1 | V | 3, 2, 1 \rangle}{\langle 3, 1, 0 | V | 3, 1, -1 \rangle} , \quad R_2 = \frac{\langle 3, 2, -1 | V | 3, 2, 0 \rangle}{\langle 3, 2, 2 | V | 3, 2, 1 \rangle} .$$

[8 punti]

2. Un atomo di idrogeno che a  $t = -\infty$  si trova nello stato fondamentale è sottoposto a un campo elettrico debole, dipendente dal tempo, dato da

$$\vec{E} = \left( 0, 0, \frac{\lambda}{A^2 + B^2 t^2} \right) .$$

(i) Scrivere il potenziale di perturbazione (carica dell'elettrone pari a  $e$ ).

(ii) Dire in quali stati  $(n, l, m)$  l'atomo può trovarsi a  $t = \infty$  secondo la teoria perturbativa al I ordine.

(iii) Calcolare la probabilità di transizione a  $t = \infty$  in uno stato con  $n = 2$ .

[Dato: le funzioni d'onda radiali degli stati  $n = 1$  ed  $n = 2$  dell'atomo di idrogeno sono

$$R_{10}(r) = \left( \frac{1}{a_0} \right)^{3/2} 2e^{-\frac{r}{a_0}} ,$$

$$R_{20}(r) = \left( \frac{1}{2a_0} \right)^{3/2} \left( 2 - \frac{r}{a_0} \right) e^{-\frac{r}{2a_0}} , \quad R_{21}(r) = \left( \frac{1}{2a_0} \right)^{3/2} \frac{r}{\sqrt{3}a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}} .$$

dove  $a_0$  è il raggio di Bohr.]

[12 punti]

3. Si consideri la diffusione di una particella da un potenziale reale con simmetria sferica. Si dimostri che

$$\sigma \leq \frac{4\pi}{k} \sqrt{\frac{d\sigma(\theta = 0)}{d\Omega}} ,$$

dove  $\sigma$  è la sezione d'urto totale e  $\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}$  quella differenziale.

[Suggerimento: si usi il teorema ottico  $\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(0)$ .]

Si verifichi esplicitamente la disuguaglianza usando l'espansione in onde parziali dell'ampiezza di diffusione,

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta)$$

e ricordando che  $P_l(1) = 1$ .

[10 punti]



## I prova di recupero, 3 luglio 2013

1. Dato l'operatore

$$V = f(r) yz ,$$

con  $f(r)$  una generica funzione della coordinata radiale  $r$ , si dica quali dei seguenti rapporti tra elementi di matrice fra stati con  $n = 3$  di un atomo di idrogeno non-relativistico possono essere calcolati senza conoscere  $f(r)$ :

$$R_1 = \frac{\langle 3, 1, 0 | V | 3, 2, 1 \rangle}{\langle 3, 1, 0 | V | 3, 1, -1 \rangle} , \quad R_2 = \frac{\langle 3, 2, -1 | V | 3, 2, 0 \rangle}{\langle 3, 2, 2 | V | 3, 2, 1 \rangle} , \quad R_3 = \frac{\langle 3, 2, -1 | V | 3, 2, 0 \rangle}{\langle 3, 1, 1 | V | 3, 1, 0 \rangle} .$$

[10 punti]

2. Un oscillatore armonico tridimensionale isotropo (massa  $m$ , carica  $q$ , pulsazione  $\omega$ ) sia sottoposto a un debole campo elettrico, diretto lungo l'asse  $z$ , della forma

$$E(t) = \begin{cases} 0 , & t < 0 , \\ E_0 \cos(\Omega t) e^{-t/\tau} , & t \geq 0 . \end{cases}$$

Sapendo che a  $t = 0$  il sistema si trova nello stato fondamentale, calcolare al prim'ordine la probabilità di trovare il sistema in uno stato eccitato ad un istante  $t \gg \tau$ .

[Si ricorda che  $a = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(x + ip/(m\omega))$ .]

[10 punti]

3. Si consideri la diffusione di una particella da un potenziale con simmetria sferica e si ammetta la possibilità che il processo abbia un canale inelastico (cioè che sia possibile che lo stato finale sia diverso dallo stato iniziale).

Si supponga di sapere che l'ampiezza di diffusione *elastica* sia data da

$$f_{\text{el}}(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{\eta_l e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} P_l(\cos \theta) ,$$

con  $\eta_l$  parametro reale,  $0 \leq \eta_l \leq 1$ , che misura il grado di elasticità del processo nel canale  $l$  ( $\eta_l = 1$  per il processo totalmente elastico,  $\eta_l = 0$  per il processo totalmente inelastico).

(i) Si calcoli la sezione d'urto elastica nel canale  $l$ .

(ii) Si calcoli, usando il teorema ottico, la sezione d'urto totale nel canale  $l$ .

(iii) Si trovi, per differenza, la sezione d'urto inelastica nel canale  $l$ .

(iv) Usando il fatto che  $(1 - \eta_l)^2 \leq |1 - \eta_l e^{2i\delta_l}|^2 \leq (1 + \eta_l)^2$ , si trovi un limite inferiore e uno superiore per la sezione d'urto elastica nel canale  $l$  in funzione di quella inelastica.

[10 punti]

## II prova di recupero, 3 settembre 2013

1. Dato l'operatore

$$V = f(r) (x^2 - y^2),$$

con  $f(r)$  una generica funzione della coordinata radiale  $r$ , si dica quali dei seguenti rapporti tra elementi di matrice fra stati con  $n = 4$  di un atomo di idrogeno non-relativistico possono essere calcolati senza conoscere  $f(r)$ :

$$R_1 = \frac{\langle 4, 1, 0 | V | 4, 0, 0 \rangle}{\langle 4, 2, 1 | V | 4, 2, -1 \rangle}, \quad R_2 = \frac{\langle 4, 3, -2 | V | 4, 1, 0 \rangle}{\langle 4, 0, 0 | V | 4, 2, 2 \rangle}, \quad R_3 = \frac{\langle 4, 3, -1 | V | 4, 1, 1 \rangle}{\langle 4, 3, 2 | V | 4, 1, 0 \rangle}.$$

[10 punti]

2. Un elettrone ( $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$ ) sia vincolato in una scatola unidimensionale di larghezza pari a  $10^{-8} \text{ cm}$ . A  $t = 0$  esso si trova nello stato fondamentale, quando un potenziale rettangolare di ampiezza  $V_0 = -10^4 \text{ eV}$ , centrato nel punto medio della buca e con larghezza pari a  $10^{-12} \text{ cm}$ , viene improvvisamente introdotto per una durata di  $5 \times 10^{-18}$  secondi, trascorsi i quali viene rimosso.

Calcolare, al I ordine perturbativo, la probabilità che, dopo la scomparsa del potenziale perturbante, l'elettrone si trovi in ciascuno degli stati con  $n = 2, 3, 4$ .

[Si ricorda che le autofunzioni normalizzate per una particella in una buca di potenziale unidimensionale infinita con estremi in  $x = 0$  ed  $x = a$  sono date da

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

e che i rispettivi autovalori sono  $E_n^{(0)} = n^2 h^2 / (8ma^2)$ , con  $n = 1, 2, 3 \dots$ ]

[10 punti]

3. Si consideri la diffusione di una particella di *alta* energia da un potenziale con simmetria sferica della forma

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases}$$

con  $V_0$  costante positiva.

(a) Si calcoli la sezione d'urto differenziale, usando l'approssimazione di Born.

(b) Si determini il valore più piccolo dell'angolo di diffusione  $\theta$  in cui essa si annulla e si dica come questa informazione può essere utilizzata per determinare il valore di  $a$ .

(c) Assumendo che la particella incidente sia un protone ( $mc^2 \simeq 938 \text{ GeV}$ ) e che  $a = 5 \times 10^{-13} \text{ cm}$ , si dica quanto deve valere almeno l'energia della particella incidente affinché sia possibile determinare  $a$ .

[10 punti]

I prova finale, 4 febbraio 2014

1. Detti  $\vec{U} \equiv (U_x, U_y, U_z)$  e  $\vec{V} \equiv (V_x, V_y, V_z)$  due operatori vettoriali, è noto che a partire da essi si possono costruire i seguenti due tensori sferici di rango 1:

$$U_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{U_x \pm iU_y}{\sqrt{2}}, \quad U_{\pm 0}^{(1)} = U_z$$

e

$$V_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{V_x \pm iV_y}{\sqrt{2}}, \quad V_{\pm 0}^{(1)} = V_z.$$

Usando le componenti di  $\vec{U} \times \vec{V}$ , costruire un terzo tensore sferico di rango 1 e dimostrare che esso soddisfa le proprietà definiti,

$$[J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)}, \quad [J_{\pm}, T_q^{(k)}] = \hbar \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)} T_{q \pm 1}^{(k)}.$$

[10 punti]

2. Un atomo di idrogeno che al tempo  $t = 0$  si trova nello stato fondamentale è sottoposto ad una perturbazione descritta dal potenziale

$$V = Axy e^{-\alpha t}, \quad A > 0, \quad \alpha > 0.$$

Assumendo che  $A$  sia sufficientemente piccola da consentire l'applicazione della teoria perturbativa dipendente dal tempo al I ordine,

- (i) dire quali sono gli stati eccitati nei quali l'atomo può trovarsi per  $t \rightarrow \infty$ ;  
 (ii) tra gli stati individuati al punto precedente, isolare quelli con il più piccolo valore del numero quantico principale  $n$  e calcolare la probabilità di transizione verso questi stati per  $t \rightarrow \infty$  (lasciare non calcolato il solo integrale sulla coordinata radiale).

[10 punti]

3. Si consideri un dipolo elettrico, costituito da due cariche  $+Q$  e  $-Q$  poste a distanza  $2a$ . Si consideri ora una particella di carica  $+Q$  e di massa  $m$  con un vettore d'onda  $\vec{k}$  perpendicolare alla direzione del dipolo. In siffatte condizioni, il potenziale di interazione tra la carica incidente e il dipolo è dato (in unità cgs) da

$$V(\vec{r}) = \frac{Q^2}{|\vec{r} + \vec{a}|} - \frac{Q^2}{|\vec{r} - \vec{a}|},$$

avendo chiamato  $\vec{a}$  e  $-\vec{a}$  i vettori che individuano rispettivamente la posizione delle cariche  $+Q$  e  $-Q$  del dipolo.

- (i) Calcolare l'ampiezza di diffusione in approssimazione di Born.  
 (ii) Trovare le direzioni in cui è massima la sezione d'urto differenziale.

[Integrale utile:  $\int d^3r \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{r} = \frac{4\pi}{q^2}$  .]

[10 punti]

I prova di recupero, 22 luglio 2014

1. Detti  $\vec{U} \equiv (U_x, U_y, U_z)$  e  $\vec{V} \equiv (V_x, V_y, V_z)$  due operatori vettoriali, è noto che a partire da essi si possono costruire i seguenti due tensori sferici di rango 1:

$$U_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{U_x \pm iU_y}{\sqrt{2}}, \quad U_{\pm 0}^{(1)} = U_z$$

e

$$V_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{V_x \pm iV_y}{\sqrt{2}}, \quad V_{\pm 0}^{(1)} = V_z.$$

Usando le proprietà definiti di un generico tensore di rango  $k$ ,

$$[J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)}, \quad [J_{\pm}, T_q^{(k)}] = \hbar \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)} T_{q \pm 1}^{(k)},$$

verificare che gli operatori

$$U_{\pm 1} V_{\pm 1}, \quad \frac{U_{\pm 1} V_0 + U_0 V_{\pm 1}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{U_1 V_{-1} + 2U_0 V_0 + U_{-1} V_1}{\sqrt{6}},$$

formano le componenti di un tensore sferico di rango 2.

[10 punti]

2. Un atomo di idrogeno che al tempo  $t = 0$  si trova nello stato fondamentale è sottoposto ad una perturbazione descritta dal potenziale

$$V = Axz e^{-\alpha t}, \quad A > 0, \quad \alpha > 0.$$

Assumendo che  $A$  sia sufficientemente piccola da consentire l'applicazione della teoria perturbativa dipendente dal tempo al I ordine,

- (i) dire quali sono gli stati eccitati nei quali l'atomo può trovarsi per  $t \rightarrow \infty$ ;  
 (ii) tra gli stati individuati al punto precedente, isolare quelli con il più piccolo valore del numero quantico principale  $n$  e calcolare la probabilità di transizione verso questi stati per  $t \rightarrow \infty$  (lasciare non calcolato il solo integrale sulla coordinata radiale).

[10 punti]

3. Una particella di massa  $m$ , carica  $Q$  e momento  $p$  è diffusa dal potenziale prodotto da una distribuzione di cariche con simmetria sferica  $\rho(r)$ , cioè da un potenziale che soddisfa l'equazione di Poisson (unità cgs),  $\nabla^2 U = -4\pi\rho$ .

Supponendo che:

- $\rho$  si annulli per  $r \rightarrow \infty$  più rapidamente di qualsiasi polinomio;
- la carica totale che genera il potenziale sia nulla, cioè  $\int \rho(r) d\vec{r} = 0$ ;
- sia noto che  $\int r^2 d\vec{r} \rho(r) = A$ ;

calcolare in approssimazione di Born la sezione d'urto differenziale a piccoli angoli.

[Suggerimento: si usi l'espansione  $e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = 1 + i\vec{q}\cdot\vec{r} + \frac{1}{2}(\vec{q}\cdot\vec{r})^2 + \dots$ , dove  $\vec{q}$  è il momento trasferito.]

[10 punti]

## II prova di recupero, 2 settembre 2014

1. Detti  $U^{(2)}$  e  $V^{(1)}$  due tensori sferici rispettivamente di rango 2 e di rango 1, si dimostri a partire dalle proprietà definenti di un generico tensore di rango  $k$ ,

$$[J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)}, \quad [J_{\pm}, T_q^{(k)}] = \hbar \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)} T_{q \pm 1}^{(k)},$$

che

$$U_2^{(2)} V_1^{(1)}$$

è una componente (quale?) di un tensore sferico di rango 3.

**[10 punti]**

2. Un atomo di idrogeno che al tempo  $t = 0$  si trova nello stato fondamentale è sottoposto ad una perturbazione descritta dal potenziale

$$V = Ax e^{-\alpha t}, \quad A > 0, \quad \alpha > 0.$$

Assumendo che  $A$  sia sufficientemente piccola da consentire l'applicazione della teoria perturbativa dipendente dal tempo al I ordine,

- (i) dire quali sono gli stati eccitati nei quali l'atomo può trovarsi per  $t \rightarrow \infty$ ;  
(ii) tra gli stati individuati al punto precedente, isolarne uno tra quelli con il più piccolo valore del numero quantico principale  $n$  e calcolare la probabilità di transizione verso questo stato per  $t \rightarrow \infty$  (lasciare non calcolato il solo integrale sulla coordinata radiale).

**[10 punti]**

3. Si calcoli in approssimazione di Born la sezione d'urto differenziale per la diffusione di una particella di massa  $m$  in un potenziale repulsivo della forma

$$U(r) = Ae^{-r^2/a^2}, \quad A > 0.$$

**[10 punti]**

**I prova finale, 2 febbraio 2015**

1. Dire quali degli elementi di matrice  $\langle n', l', m' | xy | n, l, m \rangle$  tra stati imperturbati di un atomo di idrogeno non-relativistico possono essere diversi da zero.

**[8 punti]**

2. Un atomo di idrogeno che al tempo  $t = -\epsilon$  (con  $\epsilon > 0$ ) si trova nello stato fondamentale è sottoposto ad una perturbazione impulsiva descritta dal potenziale

$$V = Ax \delta(t), \quad A > 0.$$

Assumendo che  $A$  sia sufficientemente piccola da consentire l'applicazione della teoria perturbativa dipendente dal tempo al I ordine,

(i) dire quali sono gli stati eccitati nei quali l'atomo può trovarsi per  $t > 0$ ;

(ii) tra gli stati individuati al punto precedente, isolarne uno tra quelli con il più piccolo valore del numero quantico principale  $n$  e calcolare la probabilità di transizione verso questo stato (lasciare non calcolato il solo integrale sulla coordinata radiale).

**[10 punti]**

3. Si vuole studiare il processo di assorbimento di un fotone da parte di un elettrone libero non-relativistico. In assenza di interazione, l'Hamiltoniana è data da

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m},$$

i cui autostati sono stati di definito impulso  $\vec{p} \equiv \hbar \vec{q}$ , la cui funzione d'onda è data da

$$\langle \vec{x} | \vec{q} \rangle \equiv \psi_{\vec{q}}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}},$$

avendo adottato la normalizzazione in un volume  $L^3$  e condizioni periodiche al contorno. L'energia dello stato  $|\vec{q}\rangle$  è pari a

$$E_q = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{(\hbar \vec{q})^2}{2m}.$$

Al prim'ordine perturbativo, la probabilità di assorbimento di un fotone da parte di un elettrone libero è data da

$$\frac{dP}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H' | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i),$$

dove  $H'$  è il termine dell'Hamiltoniana di interazione lineare nel potenziale vettore  $\vec{A}$ .

(a) Detti  $\vec{p}_i = \hbar \vec{q}_i$  e  $\vec{p}_f = \hbar \vec{q}_f$  gli impulsi iniziale e finale dell'elettrone,  $\hbar \vec{k}$  e  $\lambda$  l'impulso del fotone e il suo indice di polarizzazione, esplicitare l'elemento di matrice  $\langle f | H' | i \rangle$  per un generico numero di fotoni  $n_{\vec{k}, \lambda}$  nello stato iniziale;

(b) utilizzando la proprietà

$$\int_{L^3} \frac{e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}}}{\sqrt{L^3}} \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}}{\sqrt{L^3}} = \delta_{\vec{q}, \vec{p}},$$

verificare che l'elemento di matrice  $\langle f | H' | i \rangle$  implica la conservazione dell'impulso

$$\hbar \vec{q}_i + \hbar \vec{k} = \hbar \vec{q}_f;$$

(c) dimostrare che la conservazione dell'impulso è incompatibile con quella dell'energia e che, pertanto, il processo in questione non è fisicamente possibile.

**[12 punti]**

## II prova finale, 18 febbraio 2015

1. Calcolare i seguenti rapporti di elementi di matrice tra stati imperturbati di un atomo di idrogeno non-relativistico:

$$R_1 = \frac{\langle 3, 2, 1 | xz | 2, 1, 0 \rangle}{\langle 3, 1, 0 | xz | 2, 1, 1 \rangle}, \quad R_2 = \frac{\langle 4, 2, 1 | xz | 2, 0, 0 \rangle}{\langle 4, 2, -1 | xz | 2, 0, 0 \rangle}.$$

[8 punti]

2. Un oscillatore armonico unidimensionale con pulsazione  $\omega_0$  si trovi nello stato fondamentale per  $t < 0$  e sia soggetto, a partire dal tempo  $t = 0$ , ad una perturbazione della forma

$$V(t) = F_0 x \cos(\omega t).$$

Assumendo che  $F_0$  sia sufficientemente piccola da consentire l'applicazione della teoria perturbativa dipendente dal tempo al I ordine e che  $\omega \neq \omega_0$ :

(i) dire quali sono gli stati eccitati nei quali il sistema può trovarsi per  $t > 0$  e calcolare le probabilità di transizione verso di essi;

(ii) calcolare il valor medio  $\langle x \rangle$  in funzione del tempo.

Discutere come cambiano le risposte nel caso  $\omega = \omega_0$ .

[Formula utile:  $\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))$ ].

[10 punti]

3. Si vuole studiare il processo di diffusione di un fotone da parte di un elettrone libero non-relativistico:

$$\gamma + e \longrightarrow \gamma + e.$$

In assenza di interazione, l'Hamiltoniana è data da

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m},$$

i cui autostati sono stati di definito impulso  $\vec{p} \equiv \hbar\vec{q}$ , la cui funzione d'onda è data da

$$\langle \vec{x} | \vec{q} \rangle \equiv \psi_{\vec{q}}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}},$$

avendo adottato la normalizzazione in un volume  $L^3$  e condizioni periodiche al contorno. L'energia dello stato  $|\vec{q}\rangle$  è pari a

$$E_q = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{(\hbar\vec{q})^2}{2m}.$$

Indicati con  $(\hbar\vec{k}_i, \lambda_i)$  e  $(\hbar\vec{k}_f, \lambda_f)$  il momento e l'indice di polarizzazione del fotone incidente e di quello diffuso e con  $\hbar\vec{q}_i, \hbar\vec{q}_f$  i momenti dell'elettrone nello stato iniziale e nello stato, rispettivamente, calcolare al prim'ordine perturbativo la probabilità di transizione nell'unità di tempo causata da  $H''$ , cioè dal termine dell'Hamiltoniana di interazione quadratico nel potenziale vettore  $\vec{A}$ .

A tal fine, può tornare utile la formula seguente:

$$\int_{L^3} \frac{e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{L^3}} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{L^3}} d^3x = \delta_{\vec{q},\vec{p}}.$$

[12 punti]

## Appello straordinario, 13 aprile 2015

1. Calcolare i seguenti rapporti di elementi di matrice tra stati imperturbati di un atomo di idrogeno non-relativistico:

$$R_1 = \frac{\langle 4, 3, 1 | (x^2 - y^2) | 2, 1, -1 \rangle}{\langle 4, 3, -2 | (x^2 - y^2) | 2, 1, 0 \rangle}, \quad R_2 = \frac{\langle 3, 2, -1 | (x^2 - y^2) | 2, 1, 1 \rangle}{\langle 3, 2, 2 | (x^2 - y^2) | 2, 0, 0 \rangle}.$$

[8 punti]

2. Un atomo di idrogeno che al tempo  $t = 0$  si trova nello stato fondamentale è sottoposto ad una perturbazione descritta dal potenziale

$$V = A(x^2 - y^2)e^{-\alpha^2 t^2}.$$

Assumendo che  $A$  sia sufficientemente piccola da consentire l'applicazione della teoria perturbativa dipendente dal tempo al I ordine,

(i) trovare le regole di selezione per le transizioni indotte da  $V$  al prim'ordine in teoria perturbativa (si consideri un generico stato iniziale  $|n, l, m\rangle$ );

(ii) se a  $t = -\infty$  l'atomo si trova nello stato fondamentale, calcolare al prim'ordine in teoria delle perturbazioni la probabilità di transizione per  $t = +\infty$  verso gli stati accessibili (lasciare non calcolato il solo integrale sulla coordinata radiale).

[10 punti]

3. Un fascio di particelle di spin  $1/2$  e massa  $m$  è diffuso da una bersaglio che consiste di nuclei pesanti, anch'essi di spin  $1/2$ . L'interazione tra una particella del fascio e un nucleo sia data

$$V = C \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \delta^{(3)}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2),$$

dove  $C$  è una costante piccola,  $\vec{s}_1$  ed  $\vec{s}_2$  sono gli spin della particella del fascio e del nucleo, rispettivamente, mentre  $\vec{x}_1$  e  $\vec{x}_2$  sono le loro posizioni.

Calcolare la sezione d'urto differenziale e quella totale in approssimazione di Born, mediando sugli stati di spin iniziale e sommando su quelli di spin finale.

[12 punti]



## I prova di recupero, 16 giugno 2015

1. Using only the Wigner-Eckart theorem, relate as much as possible the matrix elements

$$\langle n', l' = 2, m' | \mp \frac{x \pm iy}{\sqrt{2}} | n, l = 1, m \rangle \quad \text{and} \quad \langle n', l' = 2, m = 0 | z | n, l = 1, m = 0 \rangle$$

between stationary states of a particle in a central field.

**[8 points]**

2. A hydrogen atom in the fundamental state 1s at  $t = 0$  undergoes an impulsive perturbation of the form

$$V = A \delta(x) \delta(y) \delta(z - ct), \quad A > 0, \quad c > 0.$$

Assuming that  $A$  is small enough to allow the application of first order perturbation theory,

- (i) calculate the transition probability at  $t = +\infty$  to the state 2s;  
(ii) discuss the limit of instantaneous perturbation,  $c \rightarrow \infty$ .

**[10 points]**

3. Calculate the lifetime of the 2p states with  $m = \pm 1$  in the hydrogen atom with respect to the decay into the 1s state (perform all the steps of the calculation and give the final result in seconds).

**[12 points]**

Useful formulas:

$$R_{10}(r) = \left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} 2e^{-\frac{r}{a}}, \quad R_{20}(r) = \left(\frac{1}{2a}\right)^{3/2} \left(2 - \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{r}{2a}}, \quad R_{21}(r) = \left(\frac{1}{2a}\right)^{3/2} \frac{r}{\sqrt{3}a} e^{-\frac{r}{2a}}.$$

## II prova di recupero, 21 luglio 2015

1. Write the selection rules for the matrix elements of the operator  $xz$  between stationary states of a particle in a central field.

[8 points]

2. A hydrogen atom in the fundamental state  $1s$  at  $t = 0$  undergoes a perturbation of the form

$$V = \begin{cases} Ax, & \text{for } 0 \leq t \leq t_0 \\ 0, & \text{for } t > t_0. \end{cases}$$

Assuming that  $A$  is small enough to allow the application of first order perturbation theory, calculate the transition probability at  $t = +\infty$  to the state  $|2, 1, 1\rangle$  and plot the result as a function of  $t_0$ .

[10 points]

3. We want to calculate the unpolarized total cross section for the scattering of light by a free electron, considering only the contribution from the interaction term  $H''$ . The starting point is the known expression for the transition rate in the case of one photon in the initial state,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{8\pi}{\hbar} \left( \frac{1}{2mc^2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{L^3} \right)^2 \\ &\times \frac{|\vec{\epsilon}_{\vec{k}_i, \lambda_i} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}_f, \lambda_f}|^2}{\omega_{\vec{k}_i} \omega_{\vec{k}_f}} \delta_{\vec{k}_f + \vec{q}_f, \vec{k}_i + \vec{q}_i} \delta \left( \hbar\omega_{k_i} + \frac{\hbar^2 \vec{q}_i^2}{2m} - \hbar\omega_{k_f} - \frac{\hbar^2 \vec{q}_f^2}{2m} \right), \end{aligned}$$

where  $\hbar\vec{k}_i$  and  $\hbar\vec{k}_f$  are, respectively, the momenta of the photons in the initial and final states,  $\lambda_i$  and  $\lambda_f$  denote their polarization states,  $\hbar\vec{q}_i$  and  $\hbar\vec{q}_f$  are, respectively, the momenta of the electrons in the initial and final states. Then, we have to

(i) divide by the incoming photon flux, equal to  $c/L^3$  for the case of one photon in the initial state,

(ii) average over the initial photon polarizations and sum over the final photon polarizations,

(iii) sum over the momenta of electron and photon in the final state (neglecting the electron initial and final energy in the argument of the Dirac delta).

Work out these steps and get the cross section in  $\text{fm}^2$ .

[12 points]

Useful formulas:

$$R_{10}(r) = \left( \frac{1}{a} \right)^{3/2} 2e^{-r/a}, \quad R_{21}(r) = \left( \frac{1}{2a} \right)^{3/2} \frac{r}{\sqrt{3a}} e^{-r/2a}.$$

### III prova di recupero, 8 settembre 2015

1. Show that all the components of the *electric quadrupole operator*, defined as

$$Q_{ij} \equiv x_i x_j - \frac{1}{3} r^2 \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2),$$

can be written as combinations of rank-2 spherical tensors. Thereafter, write the selection rules on the quantum number  $l$  for the matrix elements of the quadrupole operator between stationary states of a particle in a central field.

[10 points]

2. A hydrogen atom in the fundamental state  $1s$  at  $t = 0$  undergoes a perturbation of the form

$$V = \begin{cases} Axy, & \text{for } 0 \leq t \leq t_0 \\ 0, & \text{for } t > t_0. \end{cases}$$

Assuming that  $A$  is small enough to allow the application of first order perturbation theory, calculate the transition probability at  $t = +\infty$  to the state  $|3, 2, 2\rangle$ , up to the integral in the radial coordinate.

[8 points]

3. Consider an atom decaying from the state  $|a_i\rangle$  to the state  $|a_f\rangle$  with the emission of one photon. The transition rate for this process depends on the matrix element

$$\langle a_f | (\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \sigma}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} | a_i \rangle,$$

where  $\hbar\vec{k}$  is the momentum of the emitted photon,  $\vec{\epsilon}_{\vec{k}, \sigma}$  is its polarization vector and we remind that  $\vec{p}$  and  $\vec{x}$  are operators acting on the states of the atomic system.

This matrix element is usually calculated in the *dipole approximation*, which amounts to replace  $e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}$  with 1. In some cases also the contribution to the matrix element from the next term in the expansion of the exponential,  $-i\vec{k} \cdot \vec{x}$ , could be relevant:

$$M^{(1)} = \langle a_f | (\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \sigma}) (-i\vec{k} \cdot \vec{x}) | a_i \rangle.$$

- (i) Show that the two factors  $(\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \sigma})$  and  $(\vec{k} \cdot \vec{x})$  in  $M^{(1)}$  can be written in any order.

Then, rewrite  $(\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \sigma}) (\vec{k} \cdot \vec{x})$  as  $k_i \epsilon_j x_i p_j$  (sum over  $i$  and  $j$  understood) and decompose the operator  $x_i p_j$  in a symmetric and an antisymmetric part as follows:

$$x_i p_j = \frac{1}{2}(x_i p_j + x_j p_i) + \frac{1}{2}(x_i p_j - x_j p_i).$$

- (ii) Write the antisymmetric part of  $M^{(1)}$  as a matrix element of the orbital momentum.

(iii) By using suitable commutation relations, remove the dependence on the momentum operator in the symmetric part of  $M^{(1)}$  and write it in terms of matrix elements of the *electric quadrupole operator*,  $Q_{ij} \equiv x_i x_j - \frac{1}{3} r^2 \delta_{ij}$ .

[12 points]

Appello straordinario, 17 novembre 2015

1. Write all components of a rank-2 spherical tensor using the vector  $\vec{r} \equiv (x, y, z)$  and the vector  $\vec{p} \equiv (p_x, p_y, p_z)$ .

[10 points]

2. A hydrogen atom in the state  $|n, 1, 0\rangle$  at  $t = 0$  is subjected to an electric field of the form

$$\vec{E}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \vec{E}_0 e^{-t/\tau}, & t \geq 0, \end{cases}$$

with  $\vec{E}_0 = (0, 0, E_0)$ . Calculate in first order perturbation theory the probability that the system is found in the state  $|n, 2, m\rangle$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2$  at a time  $t \gg \tau$ .

[10 points]

3. Calculate the Born approximation to the differential and total cross sections for the scattering of a particle with mass  $m$  off a potential of the form

$$V(\vec{r}) = A\delta^{(3)}(\vec{r}).$$

[10 points]

I prova finale, 11 febbraio 2016

1. Given a particle with definite orbital quantum number  $l$  and spin  $s$ , use the Wigner-Eckart theorem to calculate the ratio

$$\frac{\langle \alpha', j = 3/2, m = 3/2 | \hat{L}_x | \alpha, j = 3/2, m = 1/2 \rangle}{\langle \alpha', j = 3/2, m = 1/2 | \hat{L}_z | \alpha, j = 3/2, m = 1/2 \rangle},$$

where  $L_x$  and  $L_z$  are components of the orbital angular momentum operator. Check your result using the projection theorem.

[10 points]

2. A hydrogen atom in the fundamental state  $1s$  at  $t = 0$  undergoes a perturbation of the form

$$V = \begin{cases} 0, & \text{for } t \leq 0 \\ Ap_z, & \text{for } 0 < t < t_0 \\ 0, & \text{for } t \geq t_0. \end{cases}$$

Assuming that  $A$  is small enough to allow the application of first order perturbation theory, calculate the transition probability at  $t = +\infty$  to any of the states  $2p$ . What happens in the limit  $t_0 \rightarrow \infty$ ?

[10 points]

3. The lifetime  $\tau$  for the decay of an excited matter state  $|i\rangle$  with energy  $E_i$  to a state  $|f\rangle$  with energy  $E_f$  by emission of one photon is given, in the dipole approximation, by

$$\frac{1}{\tau} = \frac{4}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega_{fi}^3}{\hbar c^3} |\langle f | \vec{x} | i \rangle|^2,$$

where  $\omega_{fi} \equiv (E_i - E_f)/\hbar$ . Using the relations

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\vec{x}, H_m], \quad \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{1}{i\hbar} \left[ \frac{d\vec{x}}{dt}, H_m \right],$$

where  $H_m$  is the Hamiltonian of the matter system, replace in the expression for  $1/\tau$  the matrix element of the position operator  $\vec{x}$  with that of the acceleration operator  $d^2\vec{x}/dt^2$ .

Then, give the expression for the energy emitted per unit time and compare it with the classical Larmor formula,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^3} \left| \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \right|^2.$$

[10 points]

Useful formulas:

$$R_{10}(r) = \left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} 2e^{-r/a}, \quad R_{21}(r) = \left(\frac{1}{2a}\right)^{3/2} \frac{r}{\sqrt{3}a} e^{-r/2a}.$$

I prova finale, 25 febbraio 2016

1. Write a spherical tensor  $T_2^{(3)}$  in terms of the components of the vectors  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  and  $\vec{w}$  (use all the three vectors).

[10 points]

2. A hydrogen atom in the fundamental state 1s at  $t = 0^-$  undergoes a perturbation of the form  $V = Az\delta(t)$ .

i) Determine the dimension of the constant  $A$ .

ii) Recalling that the force  $\vec{F}$  is equal to  $-\vec{\nabla}V$ , give a physical interpretation of the potential  $V$ .

iii) Assuming that  $A$  is small enough to allow the application of first order perturbation theory (how small?), calculate the transition probability at  $t = 0^+$  to any of the states 2p.

[10 points]

3. Recalling that the electric and magnetic fields are related to the vector potential field by

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \text{and} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

and using the Heisenberg equations of motion for the destruction operator in the non-interacting case,

$$\frac{da_{\vec{k},\sigma}}{dt} = -i\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k},\sigma},$$

calculate the *dispersion* of free electric and magnetic fields,  $\vec{E}$  and  $\vec{B}$ , on the vacuum. (The dispersion of a vector operator  $\vec{X}$  is defined as  $(\Delta X)^2 = \langle \vec{X}^2 \rangle - \langle \vec{X} \rangle^2$ .)

[10 points]

Useful formulas:

$$R_{10}(r) = \left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} 2e^{-r/a}, \quad R_{21}(r) = \left(\frac{1}{2a}\right)^{3/2} \frac{r}{\sqrt{3a}} e^{-r/2a}.$$

Appello straordinario, 6 aprile 2016

1. A proton in a nucleus be described by the state  $|\alpha, j = 3/2, m_j\rangle$ , where  $j$  and  $m_j$  are the quantum numbers of the total angular momentum of the proton, while  $\alpha$  denotes collectively all other quantum numbers. This proton, at a certain time, absorbs an  $X$ -ray photon, which was propagating along the  $y$ -axis, making a transition to a new state  $|\alpha', j', m'_j\rangle$ . In the dipole approximation the transition matrix element is proportional to

$$\langle \alpha', j', m'_j | y | \alpha, j = 3/2, m_j \rangle .$$

What are the possible values for  $j'$  and  $m'_j$ ? Assuming  $m_j = 1/2$  and  $j' = 3/2$ , compare the relative probabilities of the allowed transition.

[10 points]

2. A hydrogen atom in the fundamental state  $1s$  at  $t = -\infty$  undergoes a perturbation of the form  $V = A z (\delta(t + t_0) - \delta(t - t_0))$ .

i) Determine the dimension of the constant  $A$ .

ii) Recalling that the force  $\vec{F}$  is equal to  $-\vec{\nabla}V$ , give a physical interpretation of the potential  $V$ .

iii) Assuming that  $A$  is small enough to allow the application of first order perturbation theory (how small?), calculate the transition probability at  $t = +\infty$  to any of the states  $2p$ .

[10 points]

3. A hydrogen atom in the state  $|n = 2, l = 1, m = +1\rangle$  decays spontaneously to the state  $1s$ . Where should we place a photodetector to maximize the probability to observe the emitted photon?

[10 points]

Useful formulas:

$$R_{10}(r) = \left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} 2e^{-\frac{r}{a}}, \quad R_{21}(r) = \left(\frac{1}{2a}\right)^{3/2} \frac{r}{\sqrt{3}a} e^{-r/2a} .$$

## Appello di recupero, 16 giugno 2016

1. Given the matrix element

$$\langle \alpha', j', m'_j | x | \alpha, j = 1/2, m_j \rangle ,$$

find the values for  $j'$  and  $m'_j$  for which it can be non-zero. Then, assuming  $m_j = -1/2$  and  $j' = 3/2$ , calculate all possible ratios between non-zero matrix elements.

[10 points]

2. A hydrogen atom in the fundamental state 1s at  $t = -\infty$  undergoes a perturbation of the form

$$V = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ Ax & 0 \leq t < t_0, \\ 0 & t \geq t_0, \end{cases}$$

where  $A$  is a real constant. Assuming that  $A$  is small enough to allow the application of first order perturbation theory (how small?), calculate the transition probability at  $t = +\infty$  to any of the states 3p.

[10 points]

3. Show that, in first order perturbation theory with the dipole approximation and neglecting spin interactions, the only permitted transitions from the level  $n = 3$  to the level  $n = 1$  of the hydrogen atom with the emission of one photon are those from an initial state of the kind 3p.

Then, under the same approximations, calculate the lifetime of each of these transitions.

[10 points]

Useful formulas:

$$R_{10}(r) = \left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} 2e^{-\frac{r}{a}}, \quad R_{31}(r) = \frac{4}{81\sqrt{6}} \left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} \left(6 - \frac{r}{a}\right) \frac{r}{a} e^{-r/3a}.$$



## Appello di recupero, 7 luglio 2016

1. Write all components of a rank-3 spherical tensor, using only the position operator  $\vec{x} = (x, y, z)$ .

[10 points]

2. A hydrogen atom in the fundamental state  $1s$  is subject, from the time  $t = 0$  to the time  $t = t_0$ , to a potential of the form

$$V = AxS_z, \quad A \text{ constant .}$$

Assuming that the spin of the electron is initially along the positive  $z$ -axis, specify in which of the states of the  $n = 2$  level the atom can be found at  $t > t_0$ , according to first order time-dependent perturbation theory, and calculate the corresponding transition probability.

[10 points]

3. Calculate in first order perturbation theory with the dipole approximation the lifetime of a three-dimensional isotropic harmonic oscillator, initially in the state  $|n_x = 0, n_y = 0, n_z = 1\rangle$ , with respect to the one-photon decay to the fundamental state.

[10 points]

Useful formula:

$$a = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(x + ip/(m\omega)) .$$

## Appello di recupero, 15 settembre 2016

1. Build a rank-0 spherical tensor from two vector operators  $\vec{u}$  and  $\vec{v}$  and verify explicitly that it satisfies the defining commutation relations.

[10 points]

2. A hydrogen atom in the fundamental state  $1s$  is subject, from the time  $t = 0$  to the time  $t = t_0$ , to a potential of the form

$$V = AzS_x, \quad A \text{ constant.}$$

Assuming that the spin of the electron is initially along the positive  $z$ -axis, specify in which of the states of the  $n = 2$  level the atom can be found at  $t > t_0$ , according to first order time-dependent perturbation theory, and calculate the corresponding transition probability.

[10 points]

3. A particle with mass  $m$  is confined in a cubic box with side  $L$ . Calculate in first order perturbation theory with the dipole approximation the lifetime for the transition from the initial state  $|n_x = 1, n_y = 1, n_z = 2\rangle$  to the fundamental state  $|n_x = 1, n_y = 1, n_z = 1\rangle$ , with respect to the one-photon decay.

[10 points]

- Useful formulas (hydrogen atom):

$$R_{10}(r) = \left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} 2e^{-r/a}, \quad R_{21}(r) = \frac{a^{-3/2} r}{2\sqrt{6} a} e^{-r/2a}, \quad R_{20}(r) = \frac{a^{-3/2}}{2\sqrt{2}} \left(2 - \frac{r}{a}\right) e^{-r/2a}.$$

- *One-dimensional* infinite potential well with side  $L$ : the eigenfunctions are

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) & 0 \leq x \leq L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

The corresponding eigenvalues are  $E_n = n^2 h^2 / (8mL^2)$ .

## Appello straordinario, 2 novembre 2016

1. Given a rank-1 spherical tensor  $T^{(1)}$ , recall the defining commutation relations that must be satisfied by its components. Then, use them to show that the *Cartesian* components of that tensor,

$$T_x \equiv T_1 = \frac{T_{-1}^{(1)} - T_1^{(1)}}{\sqrt{2}}, \quad T_y \equiv T_2 = i \frac{T_{-1}^{(1)} + T_1^{(1)}}{\sqrt{2}}, \quad T_z \equiv T_3 = T_0^{(1)},$$

satisfy the commutation relations

$$[J_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk}T_k.$$

[10 points]

2. A hydrogen atom in the fundamental state  $1s$  at  $t = -\infty$  is subject to a potential of the form

$$V = Axy \delta(t), \quad A \text{ constant}.$$

Specify in which of the states the atom can be found at  $t = +\infty$  according to first order time-dependent perturbation theory, and calculate the transition probability for one of those with the lowest  $n$ , up to the integral in the radial coordinate.

[10 points]

3. Calculate in first order perturbation theory with the dipole approximation the lifetime of a three-dimensional isotropic harmonic oscillator, initially in the state

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |n_x = 1, n_y = 0, n_z = 0\rangle + |n_x = 0, n_y = 1, n_z = 0\rangle \right),$$

with respect to the one-photon decay to the fundamental state.

[10 points]

Useful formula:

$$a = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(x + ip/(m\omega)).$$

## **SOLUZIONI**

**Prova finale, 22 marzo 2004**

1. (a) Indichiamo con

$$\psi_a(\vec{r}) = \frac{\exp(i\vec{p}_a \cdot \vec{r}/\hbar)}{(2\pi\hbar)^{3/2}}, \quad \psi_b(\vec{r}) = \frac{\exp(i\vec{p}_b \cdot \vec{r}/\hbar)}{(2\pi\hbar)^{3/2}},$$

le funzioni d'onda di una particella con impulso definito e pari a  $\vec{p}_a$  e a  $\vec{p}_b$ , rispettivamente.

Poiché il sistema in esame è un sistema di *fermioni*, la funzione d'onda, data dal prodotto esterno di una funzione d'onda spaziale  $\psi$  e di una funzione d'onda di spin  $\chi$ , deve essere globalmente *anti-simmetrica* sotto lo scambio delle due particelle.

Distinguiamo i due casi di spin totale pari a 0 e ad 1.

Nel caso di spin totale pari a 0, l'unico stato di spin possibile per il sistema è lo stato *anti-simmetrico* dato da

$$\chi = |S = 0, S_z = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1|-\rangle_2 - |+\rangle_2|-\rangle_1),$$

dove  $|\pm\rangle_i$ ,  $i = 1, 2$ , rappresenta lo stato di spin della particella  $i$ -esima con componente lungo  $z$  pari a  $\pm\hbar/2$ . La funzione d'onda  $\psi$  deve essere allora *simmetrica* sotto lo scambio delle due particelle e risulta essere

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2) + \psi_b(\vec{r}_1)\psi_a(\vec{r}_2)\right).$$

Nel caso di spin totale pari a 1 con terza componente dello spin uguale a zero, abbiamo

$$\chi = |S = 1, S_z = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1|-\rangle_2 + |+\rangle_2|-\rangle_1\right)$$

che è *simmetrica* sotto lo scambio delle due particelle. La funzione d'onda  $\psi$  deve essere allora *anti-simmetrica* sotto lo scambio delle due particelle e risulta essere

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2) - \psi_b(\vec{r}_1)\psi_a(\vec{r}_2)\right).$$

(b) Per il sistema di due particelle di spin 2, lo spin totale  $S$  può prendere valori 4, 3, 2, 1 e 0. Gli stati di spin totale pari a 4, 2 e 0 sono *simmetrici* sotto lo scambio delle due particelle, gli altri sono invece *anti-simmetrici*. Poiché il sistema in questione è un sistema di *bosoni*, lo stato del sistema deve essere descritto da una funzione d'onda *simmetrica*, cioè deve essere una combinazione lineare di stati con spin totale pari a 4, 2 e 0. Dal momento che la terza componente dello spin di ciascuna delle due particelle è pari a 0, lo stato del sistema deve essere una combinazione lineare degli stati

$$|S = 4, S_z = 0\rangle, \quad |S = 2, S_z = 0\rangle, \quad |S = 0, S_z = 0\rangle.$$

2. Osserviamo innanzitutto che con le componenti del vettore  $e\vec{r}$  è possibile costruire il tensore sferico di rango 1 le cui componenti sono date da

$$\begin{aligned} T_{+1}^{(1)} &= -\frac{e(x+iy)}{\sqrt{2}}, \\ T_{-1}^{(1)} &= \frac{e(x-iy)}{\sqrt{2}}, \\ T_0^{(1)} &= ez, \end{aligned}$$

da cui segue che

$$ex = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( T_{-1}^{(1)} - T_{+1}^{(1)} \right).$$

Dalla regola di  $m$ -selezione (Sakurai, (3.10.28)) segue che l'operatore  $ez$  ha elementi di matrice non nulli tra stati con lo stesso valore della terza componente del momento angolare, mentre l'operatore  $ex$  ha elementi di matrice non nulli tra stati le cui terze componenti del momento angolare differiscono di 1 in valore assoluto.

Il teorema di Wigner-Eckart (Sakurai, (3.10.31)) mette in relazione tra di loro tutti gli elementi di matrice delle componenti di un tensore sferico di rango  $k$ :

$$\langle \alpha', j' m' | T_q^{(k)} | \alpha, j m \rangle = \left( \langle j m | \langle k q | \right) | j' m' \rangle \frac{\langle \alpha' j' || T^{(k)} || \alpha j \rangle}{\sqrt{2j+1}}.$$

Nel nostro caso questa formula diventa

$$\begin{aligned} & \langle n' = 3, l' = 2, m' | T_q^{(1)} | n = 2, l = 1, m \rangle \\ &= \left( \langle l = 1, m | \langle k = 1, q | \right) | l' = 2, m' \rangle \frac{\langle n' = 3, l' = 2 || T^{(1)} || n = 2, l = 1 \rangle}{\sqrt{2l+1}}, \end{aligned}$$

dove  $q = -1, 0, +1$ ,  $m = -1, 0, +1$  ed  $m' = -2, -1, 0, +1, +2$ . Il secondo fattore al II membro è il cosiddetto elemento di matrice ridotto (EMR),

$$(\text{EMR}) \equiv \frac{\langle n' = 3, l' = 2 || T^{(1)} || n = 2, l = 1 \rangle}{\sqrt{2l+1}}.$$

Se calcoliamo uno degli elementi di matrice non nulli dell'operatore  $T_0^{(1)} = ez$ , possiamo esprimere tutti gli elementi di matrice di  $ex$  in termini di questo. Consideriamo allora l'elemento di matrice

$$\begin{aligned} & \langle n' = 3, l' = 2, m' = 0 | T_0^{(1)} | n = 2, l = 1, m = 0 \rangle \\ &= \left( \langle l = 1, m = 0 | \langle k = 1, q = 0 | \right) | l' = 2, m' = 0 \rangle \frac{\langle n' = 3, l' = 2 || T^{(1)} || n = 2, l = 1 \rangle}{\sqrt{2l+1}} \\ &\equiv \left( \langle l = 1, m = 0 | \langle k = 1, q = 0 | \right) | l' = 2, m' = 0 \rangle \cdot (\text{EMR}), \end{aligned}$$

da cui troviamo che

$$(\text{EMR}) = \frac{\langle n' = 3, l' = 2, m' = 0 | T_0^{(1)} | n = 2, l = 1, m = 0 \rangle}{\left( \langle l = 1, m = 0 | \langle k = 1, q = 0 | \right) | l' = 2, m' = 0 \rangle}.$$

Calcoliamo ora tutti gli elementi di matrice non nulli di  $ex = (T_{-1}^{(1)} - T_{+1}^{(1)})/\sqrt{2}$ . Essi sono dati da

$$\begin{aligned} & \left\langle n' = 3, l' = 2, m' = 2 \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left( T_{-1}^{(1)} - T_{+1}^{(1)} \right) \right| n = 2, l = 1, m = 1 \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \langle l = 1, m = 1 | \langle k = 1, q = +1 | \right) | l' = 2, m' = 2 \rangle \frac{\langle n' = 3, l' = 2 || T^{(1)} || n = 2, l = 1 \rangle}{\sqrt{2l+1}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \langle l = 1, m = 1 | \langle k = 1, q = +1 | \right) | l' = 2, m' = 2 \rangle \cdot (\text{EMR}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\langle n' = 3, l' = 2, m' = 0 \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left( T_{-1}^{(1)} - T_{+1}^{(1)} \right) \right| n = 2, l = 1, m = 1 \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \langle l = 1, m = 1 | \langle k = 1, q = -1 | \right) | l' = 2, m' = 0 \rangle \cdot (\text{EMR}) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\langle n' = 3, l' = 2, m' = 1 \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left( T_{-1}^{(1)} - T_{+1}^{(1)} \right) \right| n = 2, l = 1, m = 0 \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \langle l = 1, m = 0 | \langle k = 1, q = +1 | \right) | l' = 2, m' = 1 \rangle \cdot (\text{EMR}) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\langle n' = 3, l' = 2, m' = -1 \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left( T_{-1}^{(1)} - T_{+1}^{(1)} \right) \right| n = 2, l = 1, m = 0 \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \langle l = 1, m = 0 | \langle k = 1, q = -1 | \right) | l' = 2, m' = -1 \rangle \cdot (\text{EMR}) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\langle n' = 3, l' = 2, m' = 0 \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left( T_{-1}^{(1)} - T_{+1}^{(1)} \right) \right| n = 2, l = 1, m = -1 \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \langle l = 1, m = -1 | \langle k = 1, q = +1 | \right) | l' = 2, m' = 0 \rangle \cdot (\text{EMR}) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\langle n' = 3, l' = 2, m' = -2 \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left( T_{-1}^{(1)} - T_{+1}^{(1)} \right) \right| n = 2, l = 1, m = -1 \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \langle l = 1, m = -1 | \langle k = 1, q = -1 | \right) | l' = 2, m' = -2 \rangle \cdot (\text{EMR}) . \end{aligned}$$

Ciascuno di questi elementi di matrice è espresso, attraverso (EMR), in termini dell'unico elemento di matrice supposto noto,

$$\langle n' = 3, l' = 2, m' = 0 | T_0^{(1)} | n = 2, l = 1, m = 0 \rangle ,$$

e di coefficienti di Clebsch-Gordan, reperibili nelle opportune tabelle.

## I prova di recupero, 14 luglio 2004

1. (a) Detta  $\psi_{n,\pm}(x) = \psi_n(x)\chi_{\pm}$ , dove  $\psi_n(x)$  è l' $n$ -esima autofunzione dell'oscillatore armonico unidimensionale, corrispondente all'energia  $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$  e  $\chi_{\pm}$  è la funzione d'onda corrispondente allo stato di spin  $|s = 1/2, s_z = \pm 1/2\rangle$ , lo stato di minima energia del sistema di tre particelle è quello in cui due particelle con spin opposti si trovano nello stato con  $n = 0$  e la terza in quello con  $n = 1$ . Questo stato ha energia

$$E = 2 \cdot \frac{\hbar\omega}{2} + 1 \cdot \frac{3\hbar\omega}{2} = \frac{5}{2}\hbar\omega.$$

La funzione d'onda di questo stato è ottenuta anti-simmetrizzando completamente la funzione d'onda

$$\psi_{0,+}(x_1)\psi_{0,-}(x_2)\psi_{1,\pm}(x_3)$$

rispetto a tutti i possibili scambi tra coppie di particelle.

- (b) Detto  $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$  lo spin totale, possiamo innanzitutto riscrivere il potenziale  $V$  nel modo seguente:

$$V = V_0 + V_1 \left(\frac{2}{\hbar}\right)^2 \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = V_0 + V_1 \left(\frac{2}{\hbar}\right)^2 \frac{(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2}{2}.$$

Valgono, inoltre, i seguenti valori medi sugli stati di spin del sistema delle due particelle (ricordiamo che per il sistema di due particelle di spin  $1/2$  i possibili valori di  $S$  sono  $0$  ed  $1$ ):

$$\begin{aligned} \langle \vec{S}_1^2 \rangle = \langle \vec{S}_2^2 \rangle &= \hbar^2 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{3}{4} \hbar^2, \\ \langle (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 \rangle &= \begin{cases} 0 & \text{per } S = 0, \\ \hbar^2 1(1+1) = 2\hbar^2 & \text{per } S = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Pertanto, abbiamo che

$$\langle V \rangle = \begin{cases} V_0 - 3V_1 & \text{per } S = 0, \\ V_0 + V_1 & \text{per } S = 1. \end{cases}$$

Nel caso (i) di funzione d'onda delle coordinate spaziali simmetrica, la funzione d'onda di spin deve essere *anti-simmetrica*, per avere una funzione d'onda globalmente anti-simmetrica. Ciò implica che  $S = 0$  e quindi  $\langle V \rangle = V_0 - 3V_1$ . Nel caso (ii), invece, la funzione d'onda di spin deve essere *simmetrica*, cioè  $S = 1$ , e quindi  $\langle V \rangle = V_0 + V_1$ .

2. Ricordando che i tensori sferici sono definiti dalla proprietà di trasformare sotto rotazioni come le armoniche sferiche, per trovare le componenti di un tensore sferico di rango 2 espresso in termini degli operatori  $(x, y, z)$  è sufficiente riscrivere le  $Y_m^2$  nel modo seguente

$$\begin{aligned} Y_{\pm 2}^2 &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{2} (x \pm iy)^2 \right] \\ Y_{\pm 1}^2 &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{1}{r^2} [\mp (x \pm iy)z] \\ Y_0^2 &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sqrt{6}} (3z^2 - r^2) \right]. \end{aligned}$$

Le espressioni nelle parentesi quadre delle tre equazioni di sopra possono essere identificate, rispettivamente, con  $T_{\pm 2}^{(2)}$ ,  $T_{\pm 1}^{(2)}$  e  $T_0^{(2)}$ . È ovvio che ogni altra scelta che differisce da quella fatta per una costante moltiplicativa comune a tutte le componenti di  $T_q^{(2)}$  va ugualmente bene.



## II prova di recupero, 6 ottobre 2004

1. (a) L'Hamiltoniana  $H_0$  è separabile nella somma di due Hamiltoniane di oscillatore armonico unidimensionale,

$$H_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \left[ \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \right] + \left[ \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}y^2 \right] \equiv H_{0,1} + H_{0,2} .$$

Dell'Hamiltoniana  $H_{0,i}$  conosciamo gli autostati  $|n_i\rangle$  ed i rispettivi autovalori,  $E_{n_i} = \hbar\omega(n_i + 1/2)$ , con  $n_i = 0, 1, \dots$ . Le autofunzioni di  $H_{0,1}$  sono ovviamente le  $\psi_{n_1}(x) = \langle x|n_1\rangle$ , quelle di  $H_{0,2}$  le  $\psi_{n_2}(y) = \langle y|n_2\rangle$ .

Gli autostati di  $H_0$  sono della forma  $|n_1, n_2\rangle \equiv |n_1\rangle|n_2\rangle$  e gli autovalori corrispondenti sono  $E_{n_1, n_2} = E_{n_1} + E_{n_2} = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1)$ . Il livello fondamentale è quello corrispondente a  $n_1 = n_2 = 0$  ed è pari ad  $E_{0,0} = \hbar\omega$ . Esso è evidentemente non-degenere. Il I livello eccitato è realizzato per  $n_1 = 1, n_2 = 0$  ed  $n_1 = 0, n_2 = 1$ . Esso è pari a  $E_{1,0} = E_{0,1} = 2\hbar\omega$  ed è doppiamente degenere.

- (b) Per quanto riguarda il livello fondamentale, che è non degenere, lo spostamento al I ordine perturbativo è dato da

$$\begin{aligned} \Delta_{0,0}^{(1)} &= \langle 0, 0|V|0, 0\rangle = \epsilon m\omega^2 \langle 0|x|0\rangle \langle 0|y|0\rangle \\ &= \epsilon m\omega^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x\psi_0^*(x)\psi_0(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} y\psi_0^*(y)\psi_0(y)dy = 0 , \end{aligned}$$

poiché le autofunzioni dell'oscillatore armonico unidimensionale hanno parità definita.

Il I livello eccitato è doppiamente degenere, pertanto per calcolare lo spostamento al I ordine perturbativo dobbiamo prima scrivere la matrice rappresentativa di  $V$  sull'autospazio relativo al I livello eccitato:

$$\begin{pmatrix} \langle 1, 0|V|1, 0\rangle & \langle 1, 0|V|0, 1\rangle \\ \langle 0, 1|V|1, 0\rangle & \langle 0, 1|V|0, 1\rangle \end{pmatrix} .$$

Gli elementi di matrice  $\langle 1, 0|V|1, 0\rangle$  e  $\langle 0, 1|V|0, 1\rangle$  sono nulli per lo stesso motivo per cui lo era  $\langle 0, 0|V|0, 0\rangle$ , mentre

$$\langle 1, 0|V|0, 1\rangle = \langle 0, 1|V|1, 0\rangle^* = \epsilon m\omega^2 \langle 1|x|0\rangle \langle 0|y|1\rangle = \epsilon m\omega^2 \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} = \epsilon \frac{\hbar\omega}{2}$$

(Sakurai, (2.3.25a)). Quindi la matrice della perturbazione è

$$\epsilon \frac{\hbar\omega}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

i cui autovalori sono  $\pm\epsilon\hbar\omega/2$  e gli autovettori (normalizzati)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ . Quindi gli autostati *imperturbati* ed i relativi spostamenti energetici al I ordine perturbativo sono

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |1, 0\rangle + |0, 1\rangle \right) , & \quad \Delta^{(1)} = +\epsilon \frac{\hbar\omega}{2} , \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |1, 0\rangle - |0, 1\rangle \right) , & \quad \Delta^{(1)} = -\epsilon \frac{\hbar\omega}{2} . \end{aligned}$$

(c) Consideriamo l'Hamiltoniana perturbata  $H \equiv H_0 + V$ ,

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + 2\epsilon xy).$$

Definendo i seguenti nuovi operatori posizione ed impulso,

$$\begin{aligned} X &= \frac{x+y}{\sqrt{2}}, & P_X &= \frac{p_x+p_y}{\sqrt{2}}, \\ Y &= \frac{x-y}{\sqrt{2}}, & P_Y &= \frac{p_x-p_y}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

che soddisfano relazioni di commutazione canoniche, troviamo facilmente che

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(1+\epsilon)X^2 + \frac{m\omega^2}{2}(1-\epsilon)Y^2,$$

che è separabile nella somma di una Hamiltoniana di oscillatore armonico unidimensionale lungo  $X$  con pulsazione  $\omega\sqrt{1+\epsilon}$  e di una Hamiltoniana di oscillatore armonico unidimensionale lungo  $Y$  con pulsazione  $\omega\sqrt{1-\epsilon}$ . Quindi gli autovalori *esatti* del sistema sono dati da

$$\begin{aligned} E_{n_1, n_2} &= \hbar\omega\sqrt{1+\epsilon}\left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\sqrt{1-\epsilon}\left(n_2 + \frac{1}{2}\right) \\ &= E_{n_1, n_2}^{(0)} + \epsilon\frac{\hbar\omega}{2}(n_1 - n_2) + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Il risultato perturbativo ottenuto al punto precedente è quindi perfettamente in accordo con il calcolo esatto.

2. (a) L'operatore  $x$  può essere scritto come una combinazione lineare dei tensori sferici  $T_{+1}^{(1)}$  e  $T_{-1}^{(1)}$  (Sakurai, (3.10.16)), quindi può dar luogo a elementi di matrice non nulli solo tra stati con  $\Delta m = \pm 1$ . L'elemento di matrice in questione è quindi nullo.
- (b) Per il teorema della proiezione (Sakurai, (3.10.40)) abbiamo

$$\langle L_z \rangle = \frac{\langle \vec{J} \cdot \vec{L} \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \langle J_z \rangle = \frac{1}{2} \frac{\langle \vec{J}^2 + \vec{L}^2 - \vec{S}^2 \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \langle J_z \rangle,$$

dove i valori medi vanno calcolati sullo stato  $|l=4, s=1/2; j=9/2, m=7/2\rangle$ . Abbiamo quindi

$$\langle L_z \rangle = \frac{\hbar^2 \frac{9}{2} \left(\frac{9}{2} + 1\right) + 4(4+1) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right)}{\hbar^2 \frac{9}{2} \left(\frac{9}{2} + 1\right)} \hbar \frac{7}{2} = \hbar \frac{28}{9}.$$

(c) Lo stato di singoletto di spin totale è

$$|S=0, S_z=0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |+\rangle_{e^-} |-\rangle_{e^+} - |-\rangle_{e^-} |+\rangle_{e^+} \right),$$

mentre quello di tripletto con  $m_s = 0$  è

$$|S=1, S_z=0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |+\rangle_{e^-} |-\rangle_{e^+} + |-\rangle_{e^-} |+\rangle_{e^+} \right),$$

dove  $|\pm\rangle_{e^\pm}$  indica l'autostato con  $S_z^{(e^\pm)} = \pm\hbar/2$ . È facile vedere allora che

$$\langle S=0, S_z=0 | (S_z^{(e^-)} - S_z^{(e^+)}) | S=1, S_z=0 \rangle = \hbar.$$

## Prova finale, 14 aprile 2005

1. L'Hamiltoniana del sistema è data da

$$H(x, p) = H_0(x, p) + \lambda x ,$$

dove

$$H_0(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

è l'Hamiltoniana imperturbata, della quale si conoscono gli autovalori

$$E_n^{(0)} = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e le corrispondenti autofunzioni. Il termine  $\lambda x$  rappresenta una perturbazione del sistema, se  $\lambda$  è tale da soddisfare

$$\lambda x_0 \ll \hbar\omega ,$$

dove  $x_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$  è la scala di lunghezza tipica per il sistema ed  $\hbar\omega$  rappresenta la separazione tra due livelli energetici contigui.

Lo spostamento al I ordine in teoria delle perturbazioni del livello fondamentale è nullo, poiché

$$\Delta_0^{(1)} = \lambda \langle 0|x|0 \rangle = 0 ,$$

per parità. Il primo termine di spostamento energetico non nullo è pertanto quello di II ordine, dato da

$$\Delta_0^{(2)} = \sum_{k \neq 0} \frac{\lambda^2 |\langle k|x|0 \rangle|^2}{E_0^{(0)} - E_k^{(0)}} .$$

L'unico elemento di matrice non nullo tra quelli che appaiono al numeratore della precedente equazione è quello per  $k = 1$ , per il quale si ha

$$\langle 1|x|0 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

(Sakurai, (2.3.25a)). Pertanto

$$\Delta_0^{(2)} = \frac{\lambda^2 |\langle 1|x|0 \rangle|^2}{E_0^{(0)} - E_1^{(0)}} = -\frac{\lambda^2}{2m\omega^2} .$$

In definitiva, al II ordine in teoria delle perturbazioni, il livello fondamentale è dato da

$$E_0 = E_0^{(0)} + \Delta_0^{(2)} = \frac{\hbar\omega}{2} - \frac{\lambda^2}{2m\omega^2} . \quad (1)$$

D'altro canto, gli autovalori dell'Hamiltoniana perturbata  $H$  possono essere trovati in modo *esatto* e per ogni valore di  $\lambda$ , osservando che

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \lambda x = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \left( x + \frac{\lambda}{m\omega^2} \right)^2 - \frac{\lambda^2}{2m\omega^2}$$

che, detta  $y = x + \lambda/(m\omega^2)$ , è della forma  $H_0(y, p)$ , a meno della costante additiva  $-\lambda^2/(2m\omega^2)$ . Quindi gli autovalori di  $H(x, p)$  sono gli stessi di  $H_0(x, p)$ , a meno di  $-\lambda^2/(2m\omega^2)$ , cioè lo

spostamento energetico *esatto* è dato, per ogni  $n$ , da un termine quadratico in  $\lambda$ , che non può che coincidere con quello che si ottiene dalla teoria delle perturbazioni al II ordine. In definitiva,

$$E_n = E_n^{(0)} - \frac{\lambda^2}{2m\omega^2} = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\lambda^2}{2m\omega^2} ,$$

che coincide con il risultato ottenuto in (1) per  $n = 0$ .

2. Per una particella di spin  $1/2$  con momento angolare orbitale  $l$ , i possibili valori di  $j$  sono  $l + 1/2$  ed  $l - 1/2$ . Per calcolare il valor medio di  $S_z$  su ciascuno degli stati  $|l \pm 1/2, m\rangle$ , usiamo il teorema della proiezione (Sakurai, (3.10.40)):

$$\left\langle l \pm \frac{1}{2}, m | S_z | l \pm \frac{1}{2}, m \right\rangle = \frac{\langle l \pm \frac{1}{2}, m | \vec{J} \cdot \vec{S} | l \pm \frac{1}{2}, m \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \left\langle l \pm \frac{1}{2}, m | J_z | l \pm \frac{1}{2}, m \right\rangle .$$

Il valor medio  $\langle l \pm 1/2, m | J_z | l \pm 1/2, m \rangle$  è banalmente pari a  $\hbar m$ . Per calcolare il valor medio di  $\vec{J} \cdot \vec{S}$ , osserviamo che vale  $\vec{J} \cdot \vec{S} = (\vec{J}^2 + \vec{S}^2 - \vec{L}^2)/2$  e quindi

$$\begin{aligned} \left\langle l \pm \frac{1}{2}, m | \vec{J} \cdot \vec{S} | l \pm \frac{1}{2}, m \right\rangle &= \frac{1}{2} \left\langle l \pm \frac{1}{2}, m | (\vec{J}^2 + \vec{S}^2 - \vec{L}^2) | l \pm \frac{1}{2}, m \right\rangle \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \left[ j(j+1) + \frac{3}{4} - l(l+1) \right] . \end{aligned}$$

Mettendo insieme questi risultati e ricordando che  $j = l \pm 1/2$ , abbiamo alla fine

$$\left\langle l \pm \frac{1}{2}, m | S_z | l \pm \frac{1}{2}, m \right\rangle = \pm \frac{m\hbar}{2l+1} .$$

3. L'operatore  $z$  è un operatore dispari e trasforma sotto rotazioni come la componente 0 di un tensore sferico di rango 1, quindi, per determinare quali degli elementi di matrice del tipo

$$\langle n, l', m' | z | n, l, m \rangle$$

sono diversi da zero, osserviamo innanzitutto che le autofunzioni dell'atomo di idrogeno hanno parità definita, quindi sono uguali a zero tutti gli elementi di matrice diagonali. Poi, facciamo ricorso al teorema di Wigner-Eckart (Sakurai, (3.10.31)) e riconduciamo il problema a quello di determinare quali coefficienti di Clebsch-Gordan del tipo

$$\left( \langle lm | \langle 10 | \right) | l' m' \rangle$$

sono diversi da zero. Ricordando che  $l, l'$  possono prendere valori 0, 1 e 2, abbiamo che gli elementi di matrice diversi da zero sono

$$\begin{aligned} &\langle n = 3, l' = 0, m' = 0 | z | n = 3, l = 1, m = 0 \rangle , \\ &\langle n = 3, l' = 1, m' = 0 | z | n = 3, l = 2, m = 0 \rangle , \\ &\langle n = 3, l' = 1, m' = \pm 1 | z | n = 3, l = 2, m = \pm 1 \rangle \end{aligned}$$

ed i loro complessi coniugati.

## I prova di recupero, 13 luglio 2005

1. L'Hamiltoniana del sistema è data da

$$H(x, p) = H_0(x, p) + \lambda x^2 ,$$

dove

$$H_0(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

è l'Hamiltoniana imperturbata, della quale si conoscono gli autovalori

$$E_n^{(0)} = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e le corrispondenti autofunzioni. Il termine  $\lambda x^2$  rappresenta una perturbazione del sistema, se  $\lambda$  è tale da soddisfare

$$\lambda x_0^2 \ll \hbar\omega ,$$

dove  $x_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$  è la scala di lunghezza tipica per il sistema ed  $\hbar\omega$  rappresenta la separazione tra due livelli energetici contigui. La condizione di sopra è equivalente a  $\lambda \ll m\omega^2$ .

Lo spostamento al I ordine in teoria delle perturbazioni del livello fondamentale è

$$\Delta_0^{(1)} = \lambda \langle 0 | x^2 | 0 \rangle = \lambda \frac{\hbar}{2m\omega} .$$

Quindi, al I ordine in teoria delle perturbazioni, il livello fondamentale è dato da

$$E_0 = E_0^{(0)} + \Delta_0^{(1)} = \frac{\hbar\omega}{2} \left( 1 + \frac{\lambda}{m\omega^2} \right) . \quad (2)$$

D'altro canto, gli autovalori dell'Hamiltoniana perturbata  $H$  possono essere trovati in modo *esatto* e per ogni valore di  $\lambda$ , osservando che

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \lambda x^2 = \frac{p^2}{2m} + \left( \frac{1}{2}m\omega^2 + \lambda \right) x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2 x^2 ,$$

con  $\Omega^2 \equiv \omega^2(1 + 2\lambda/(m\omega^2))$ . L'Hamiltoniana  $H(x, p)$  è quindi quella di un oscillatore armonico imperturbato con pulsazione  $\Omega$  ed i suoi autovalori sono della forma  $\hbar\Omega(n + 1/2)$ . In particolare, il livello fondamentale è dato da

$$E_0 = \frac{\hbar\Omega}{2} = \frac{\hbar\omega}{2} \sqrt{1 + \frac{2\lambda}{m\omega^2}} = \frac{\hbar\omega}{2} \left( 1 + \frac{\lambda}{m\omega^2} \right) + O(\lambda^2) ,$$

in accordo con il calcolo perturbativo.

2. Per una particella di spin  $1/2$  con momento angolare orbitale  $l$ , i possibili valori di  $j$  sono  $l + 1/2$  ed  $l - 1/2$ . Per calcolare il valor medio di  $l_z$  su ciascuno degli stati  $|l \pm 1/2, m\rangle$ , usiamo il teorema della proiezione (Sakurai, (3.10.40)):

$$\left\langle l \pm \frac{1}{2}, m | l_z | l \pm \frac{1}{2}, m \right\rangle = \frac{\langle l \pm \frac{1}{2}, m | \vec{J} \cdot \vec{L} | l \pm \frac{1}{2}, m \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \left\langle l \pm \frac{1}{2}, m | J_z | l \pm \frac{1}{2}, m \right\rangle .$$

Il valor medio  $\langle l \pm 1/2, m | J_z | l \pm 1/2, m \rangle$  è banalmente pari a  $\hbar m$ . Per calcolare il valor medio di  $\vec{J} \cdot \vec{L}$ , osserviamo che vale  $\vec{J} \cdot \vec{L} = (\vec{J}^2 + \vec{L}^2 - \vec{S}^2)/2$  e quindi

$$\begin{aligned} \left\langle l \pm \frac{1}{2}, m \left| \vec{J} \cdot \vec{L} \right| l \pm \frac{1}{2}, m \right\rangle &= \frac{1}{2} \left\langle l \pm \frac{1}{2}, m \left| (\vec{J}^2 + \vec{L}^2 - \vec{S}^2) \right| l \pm \frac{1}{2}, m \right\rangle \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \left[ j(j+1) + l(l+1) - \frac{3}{4} \right]. \end{aligned}$$

Mettendo insieme questi risultati e ricordando che  $j = l \pm 1/2$ , abbiamo alla fine

$$\begin{aligned} \left\langle l + \frac{1}{2}, m \left| l_z \right| l + \frac{1}{2}, m \right\rangle &= \frac{l}{l + \frac{1}{2}} \hbar m \\ \left\langle l - \frac{1}{2}, m \left| l_z \right| l - \frac{1}{2}, m \right\rangle &= \frac{l + 1}{l + \frac{1}{2}} \hbar m \end{aligned}$$

3. (a) Nel caso di particelle distinguibili è possibile dire che la particella 1 si trova nello stato fondamentale e la particella 2 nel primo stato eccitato (o viceversa). La funzione d'onda del sistema è data allora da  $\psi(x_1, x_2) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)$  ed abbiamo

$$\begin{aligned} \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle &= \int_0^a dx_1 \int_0^a dx_2 \psi_1^*(x_1) \psi_2^*(x_2) (x_1 - x_2)^2 \psi_1(x_1) \psi_2(x_2) \\ &= \int_0^a dx_1 x_1^2 |\psi_1(x_1)|^2 + \int_0^a dx_2 x_2^2 |\psi_2(x_2)|^2 \\ &\quad - 2 \int_0^a dx_1 x_1 |\psi_1(x_1)|^2 \int_0^a dx_2 x_2 |\psi_2(x_2)|^2 \\ &= \int_0^a dx x^2 |\psi_1(x)|^2 + \int_0^a dx x^2 |\psi_2(x)|^2 \\ &\quad - 2 \left( \int_0^a dx x |\psi_1(x)|^2 \right) \left( \int_0^a dx x |\psi_2(x)|^2 \right) \\ &= \langle \psi_1 | x^2 | \psi_1 \rangle + \langle \psi_2 | x^2 | \psi_2 \rangle - 2 \langle \psi_1 | x | \psi_1 \rangle \langle \psi_2 | x | \psi_2 \rangle, \end{aligned}$$

dove si è fatto uso della proprietà delle autofunzioni di essere normalizzate. I valori medi nell'ultimo rigo dell'espressione precedente sono riferiti a stati di singola particella e possono essere calcolati facilmente:

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 | x^2 | \psi_1 \rangle &= a^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2} \right) \\ \langle \psi_2 | x^2 | \psi_2 \rangle &= a^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{8\pi^2} \right) \\ \langle \psi_1 | x | \psi_1 \rangle &= \langle \psi_2 | x | \psi_2 \rangle = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

In definitiva, si ha che

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \frac{a^2}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{5}{4\pi^2} \right).$$

(b,c) Nel caso bosonico (fermionico), lo stato del sistema delle due particelle è dato dalla combinazione *simmetrica* (*antisimmetrica*) dello stato in cui la particella 1 si trova nel fondamentale e la particella 2 nel primo eccitato e dello stato in cui la particella 2 si trova nel fondamentale e la particella 1 nel primo eccitato, cioè

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \pm \psi_2(x_1)\psi_1(x_2) \right).$$

In questo caso si ha

$$\begin{aligned}
 \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle &= \int_0^a dx_1 \int_0^a dx_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi_1^*(x_1) \psi_2^*(x_2) \pm \psi_2^*(x_1) \psi_1^*(x_2) \right) (x_1 - x_2)^2 \\
 &\times \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi_1(x_1) \psi_2(x_2) \pm \psi_2(x_1) \psi_1(x_2) \right) \\
 &= \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_{\text{distinguibili}} \mp 2 \left| \langle \psi_1 | x | \psi_2 \rangle \right|^2,
 \end{aligned}$$

dove si è fatto uso dell'ortogonalità tra  $\psi_1$  e  $\psi_2$ . Con  $\langle \dots \rangle_{\text{distinguibili}}$  si intende il valor medio calcolato per particelle distinguibili, cioè come nel caso (a).

Usando il fatto che

$$\langle \psi_1 | x | \psi_2 \rangle = -\frac{16a}{9\pi^2},$$

si ha infine che

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \frac{a^2}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{5}{4\pi^2} \right) \mp 2 \left( \frac{16a}{9\pi^2} \right)^2.$$

Il valor medio  $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$  rappresenta fisicamente la distanza quadratica media tra le due particelle. Nel caso di bosoni (fermioni) essa risulta essere inferiore (superiore) rispetto a quella tra particelle distinguibili. Ciò era prevedibile: la probabilità di trovare due fermioni vicini è più bassa rispetto a quella di trovare vicini due bosoni.

## II prova di recupero, 7 settembre 2005

1. Osserviamo innanzitutto che per poter trattare  $V = \lambda x$  come una perturbazione occorre che gli elementi di matrice tipici di  $V$ , che sono dell'ordine di  $\lambda a$ , con  $a$  il raggio di Bohr, siano molto più piccoli della separazione tipica tra due livelli energetici contigui dell'atomo di idrogeno non-relativistico, che è dell'ordine di  $e^2/a$ . Pertanto deve essere  $\lambda \ll e^2/a^2$ .

Il livello  $n = 2$  dell'atomo di idrogeno non-relativistico è degenere e la molteplicità è pari a 4, se si trascura lo spin dell'elettrone che è inessenziale nel caso di perturbazione della forma data. Bisogna pertanto applicare la teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo, caso degenere.

Per trovare gli spostamenti energetici al I ordine, occorre trovare gli autovalori della matrice rappresentativa della perturbazione. Si tratta della seguente matrice  $4 \times 4$ ,

$$\begin{pmatrix} \langle 2, 0, 0|V|2, 0, 0\rangle & \langle 2, 0, 0|V|2, 1, 1\rangle & \langle 2, 0, 0|V|2, 1, -1\rangle & \langle 2, 0, 0|V|2, 1, 0\rangle \\ \langle 2, 1, 1|V|2, 0, 0\rangle & \langle 2, 1, 1|V|2, 1, 1\rangle & \langle 2, 1, 1|V|2, 1, -1\rangle & \langle 2, 1, 1|V|2, 1, 0\rangle \\ \langle 2, 1, -1|V|2, 0, 0\rangle & \langle 2, 1, -1|V|2, 1, 1\rangle & \langle 2, 1, -1|V|2, 1, -1\rangle & \langle 2, 1, -1|V|2, 1, 0\rangle \\ \langle 2, 1, 0|V|2, 0, 0\rangle & \langle 2, 1, 0|V|2, 1, 1\rangle & \langle 2, 1, 0|V|2, 1, -1\rangle & \langle 2, 1, 0|V|2, 1, 0\rangle \end{pmatrix}$$

dove si è adottata la notazione standard  $|n, l, m\rangle$  per gli autostati dell'atomo di idrogeno non-relativistico.

Ricordando che l'operatore  $x$  può essere scritto come combinazione lineare di due tensori sferici di rango 1 con componenti  $+1$  e  $-1$ , si può dedurre immediatamente che gli unici elementi di matrice diversi da zero sono

$$\langle 2, 0, 0|V|2, 1, 1\rangle, \quad \langle 2, 0, 0|V|2, 1, -1\rangle$$

ed i loro complessi coniugati. Usando la forma esplicita delle autofunzioni con  $n = 2$  dell'atomo di idrogeno non-relativistico (Sakurai, Appendici A.5 ed A.6), si trova facilmente

$$\langle 2, 0, 0|V|2, 1, 1\rangle = \frac{3}{\sqrt{2}}a\lambda,$$

$$\langle 2, 0, 0|V|2, 1, -1\rangle = -\frac{3}{\sqrt{2}}a\lambda,$$

e, quindi, per la matrice della perturbazione,

$$\frac{3}{\sqrt{2}}a\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha autovalori 0 (con molteplicità pari a 2) e  $\pm 3a\lambda$ . Il livello  $n = 2$ , che è 4 volte degenere in assenza di perturbazione, si separa in tre livelli quando la perturbazione è "accesa". Di questi tre livelli, uno, doppiamente degenere, è esattamente uguale a quello



imperturbato, gli altri due sono disposti simmetricamente rispetto ad esso, con separazione data da  $3a\lambda$ .

Si lascia come esercizio la determinazione degli autovettori della matrice delle perturbazioni, che corrispondono agli stati *imperturbati* che diagonalizzano la perturbazione.

2. Vedere Problema 2 del 14 aprile 2005.

3. La soluzione è identica a quella del Problema 3 del 13 luglio 2005, con la differenza che le funzioni d'onda dello stato fondamentale e del primo stato eccitato, rispettivamente  $\psi_0(x)$  e  $\psi_1(x)$ , sono quelle di un oscillatore armonico unidimensionale.

(a)

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle \psi_0 | x^2 | \psi_0 \rangle + \langle \psi_1 | x^2 | \psi_1 \rangle, \quad (3)$$

dove si è fatto uso del fatto che  $\langle \psi_0 | x | \psi_0 \rangle = \langle \psi_1 | x | \psi_1 \rangle$  per parità.

Poiché

$$\langle \psi_0 | x^2 | \psi_0 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega},$$

$$\langle \psi_1 | x^2 | \psi_1 \rangle = \frac{3\hbar}{2m\omega},$$

si ha

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \frac{2\hbar}{m\omega}.$$

(b,c)

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_{\text{distinguibili}} \mp 2 \left| \langle \psi_0 | x | \psi_1 \rangle \right|^2. \quad (4)$$

Poiché

$$\langle \psi_0 | x | \psi_1 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}},$$

si ha

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega} (2 \mp 1).$$

**Prova finale, 11 aprile 2006**

1. Svolgiamo i calcoli in dettaglio nel caso dello stato  $\Phi_1$ ; l'estensione del risultato ai casi di  $\Phi_2$  e  $\Phi_3$  sarà immediata.

Lo stato  $\Phi_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  deve essere *antisimmetrico* rispetto allo scambio dei due fermioni ed ha, pertanto, la forma seguente:

$$\Phi_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \psi_2(\vec{x}_1)\psi_3(\vec{x}_2) - \psi_3(\vec{x}_1)\psi_2(\vec{x}_2) \right].$$

In questa forma lo stato  $\Phi_1$  è normalizzato, se assumiamo che  $\psi_2$  e  $\psi_3$  lo siano.

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1 | B | \Phi_1 \rangle &= \int d\vec{x}_1 \int d\vec{x}_2 \Phi_1^*(\vec{x}_1, \vec{x}_2) B \Phi_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \\ &= \frac{1}{2} \int d\vec{x}_1 \int d\vec{x}_2 \left[ \psi_2(\vec{x}_1)\psi_3(\vec{x}_2) - \psi_3(\vec{x}_1)\psi_2(\vec{x}_2) \right]^* \left[ A(\vec{x}_1) + A(\vec{x}_2) \right] \left[ \psi_2(\vec{x}_1)\psi_3(\vec{x}_2) - \psi_3(\vec{x}_1)\psi_2(\vec{x}_2) \right] \\ &= \int d\vec{x} \psi_2^*(\vec{x}) A(\vec{x}) \psi_2(\vec{x}) + \int d\vec{x} \psi_3^*(\vec{x}) A(\vec{x}) \psi_3(\vec{x}) = \langle \psi_2 | A | \psi_2 \rangle + \langle \psi_3 | A | \psi_3 \rangle, \end{aligned}$$

dove è stata usata l'ortogonalità tra  $\psi_2$  e  $\psi_3$ .

Procedendo in modo analogo per  $\Phi_2$  e  $\Phi_3$ , si trova

$$\langle \Phi_2 | B | \Phi_2 \rangle = \langle \psi_1 | A | \psi_1 \rangle + \langle \psi_3 | A | \psi_3 \rangle,$$

$$\langle \Phi_3 | B | \Phi_3 \rangle = \langle \psi_1 | A | \psi_1 \rangle + \langle \psi_2 | A | \psi_2 \rangle.$$

Il risultato trovato nei tre casi può essere scritto nella forma

$$\langle \Phi_i | B | \Phi_i \rangle = \sum_{k=1,2,3} \langle \psi_k | A | \psi_k \rangle - \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle, \quad i = 1, 2, 3,$$

che suggerisce di interpretare il valor medio di  $B$  su uno stato con una lacuna come un valore costante comune (valore di “mare”) *meno* il contributo dovuto alla lacuna. Per esempio, se l'osservabile  $B$  fosse l'energia del sistema, potremmo dire che il valor medio dell'energia su uno stato con una lacuna è una costante fissata una volta per tutte (l'energia del “mare”) *meno* l'energia media sullo stato in cui c'è la lacuna. Se si prende come livello zero per l'energia quello corrispondente all'energia del “mare”, allora si può dire che la lacuna è assimilabile ad uno stato con energia media negativa.

2. L'Hamiltoniana del sistema è della forma  $H_0 + V$ , dove  $H_0$  è l'Hamiltoniana dell'atomo di idrogeno imperturbato e

$$V = -e\vec{E} \cdot \vec{r} - \frac{e}{2mc} \vec{l} \cdot \vec{B}, \quad e < 0,$$

è l'Hamiltoniana di perturbazione.

(a) Caso  $\vec{E}$  parallelo a  $\vec{B}$ .

Chiamiamo  $z$  l'asse lungo cui sono orientati  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Abbiamo allora

$$V = -eEz - \frac{eB}{2mc} l_z.$$

Ricordando che gli autostati di  $H_0$  sono autostati di  $\vec{l}^2$  e di  $l_z$  e possono essere etichettati nella forma  $|n, l, m\rangle$ , con la notazione standard per i numeri quantici  $n, l$  ed  $m$ , abbiamo che la matrice della perturbazione sullo spazio con  $n = 2$  è data da

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

se gli stati vengono presi nell'ordine  $|2, 1, 1\rangle, |2, 1, -1\rangle, |2, 1, 0\rangle, |2, 0, 0\rangle$ . Le costanti  $\alpha$  e  $\beta$  sono date da

$$\alpha = -eE \int d\vec{x} \psi_{210}^*(\vec{x}) z \psi_{200}(\vec{x}), \quad \beta = -\frac{e\hbar B}{2mc},$$

dove  $\psi_{nlm}(\vec{x})$  è l'autofunzione corrispondente a  $|n, l, m\rangle$ .

Gli autovalori di questa matrice forniscono gli spostamenti energetici, che sono  $\beta, -\beta, \alpha, -\alpha$ . Gli autostati imperturbati corrispondenti sono, rispettivamente,

$$|2, 1, 1\rangle, \quad |2, 1, -1\rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 1, 0\rangle + |2, 0, 0\rangle), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 1, 0\rangle - |2, 0, 0\rangle).$$

(a) Caso  $\vec{E}$  ortogonale a  $\vec{B}$ .

Chiamiamo  $x$  l'asse lungo cui è orientato  $\vec{E}$  e  $z$  quello lungo cui è orientato  $\vec{B}$ . Abbiamo allora

$$V = -eEx - \frac{eB}{2mc} l_z.$$

La matrice della perturbazione prende ora la forma seguente,

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\beta & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se gli stati vengono presi nell'ordine  $|2, 1, 1\rangle, |2, 1, -1\rangle, |2, 1, 0\rangle, |2, 0, 0\rangle$ . La costante  $\beta$  è la stessa del caso precedente, mentre

$$\alpha = -eE \int d\vec{x} \psi_{211}^*(\vec{x}) x \psi_{200}(\vec{x}) = +eE \int d\vec{x} \psi_{21-1}^*(\vec{x}) x \psi_{200}(\vec{x}).$$

L'ultima uguaglianza segue dall'applicazione del teorema di Wigner-Eckart.

Gli spostamenti energetici risultano essere, in questo caso, pari a 0 (2 volte) e  $\pm\sqrt{2\alpha^2 + \beta^2}$ . Si lascia come esercizio la determinazione dei corrispondenti autostati imperturbati.

## I prova di recupero, 17 luglio 2006

1. L'Hamiltoniana del sistema è data da

$$H(x, p) = H_0(x, p) + \lambda \frac{p}{m},$$

dove

$$H_0(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

è l'Hamiltoniana imperturbata, della quale si conoscono gli autovalori

$$E_n^{(0)} = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e le corrispondenti autofunzioni. Il termine  $\lambda p/m$  rappresenta una perturbazione del sistema, se  $\lambda$  (che deve essere reale affinché  $H$  sia hermitiana) è tale da soddisfare

$$\frac{\lambda \hbar}{m x_0} \ll \hbar\omega,$$

dove  $x_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$  è la scala di lunghezza tipica per il sistema ed  $\hbar\omega$  rappresenta la separazione tra due livelli energetici contigui. La condizione di sopra è equivalente a  $\lambda \ll \sqrt{m\hbar\omega}$ .

Lo spostamento al I ordine in teoria delle perturbazioni del livello  $n$ -esimo è nullo, poiché

$$\Delta_n^{(1)} = \frac{\lambda}{m} \langle n|p|n \rangle = 0,$$

per parità. Il primo termine di spostamento energetico non nullo è pertanto quello di II ordine, dato da

$$\Delta_n^{(2)} = \frac{\lambda^2}{m^2} \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k|p|n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}.$$

Usando la formula

$$\langle k|p|n \rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left( -\sqrt{n}\delta_{k,n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{k,n+1} \right)$$

(Sakurai, (2.3.25b)), otteniamo che

$$\Delta_n^{(2)} = \lambda^2 \frac{\hbar\omega}{2m} \left( \frac{n}{E_n^{(0)} - E_{n-1}^{(0)}} + \frac{n+1}{E_n^{(0)} - E_{n+1}^{(0)}} \right) = -\frac{\lambda^2}{2m}.$$

In definitiva, al II ordine in teoria delle perturbazioni, il livello  $n$ -esimo è dato da

$$E_n^{(2)} = E_n^{(0)} + \Delta_n^{(2)} = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\lambda^2}{2m}. \quad (5)$$

D'altro canto, gli autovalori dell'Hamiltoniana perturbata  $H$  possono essere trovati in modo *esatto* e per ogni valore di  $\lambda$ , osservando che

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \lambda \frac{p}{m} = \frac{1}{2m} (p + \lambda)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - \frac{\lambda^2}{2m}$$

che, posto  $P = p + \lambda$ , è della forma  $H_0(x, P)$ , a meno della costante additiva  $-\lambda^2/(2m)$ . Poiché  $x$  e  $P$  soddisfano le regole di commutazione canoniche, gli autovalori di  $H(x, p)$  sono gli stessi di  $H_0(x, P)$ , a meno di  $-\lambda^2/(2m)$ , cioè lo spostamento energetico *esatto* è dato, per ogni  $n$ , da un termine quadratico in  $\lambda$ , che non può che coincidere con quello che si ottiene dalla teoria delle perturbazioni al II ordine. In definitiva,

$$E_n = E_n^{(0)} - \frac{\lambda^2}{2m} = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\lambda^2}{2m} .$$

Passiamo ora a considerare le autofunzioni perturbate. Al I ordine perturbativo l'autostato perturbato è dato da  $|n^{(0)}\rangle + |n^{(1)}\rangle$ , con

$$\begin{aligned} |n^{(1)}\rangle &= \frac{\lambda}{m} \sum_{k \neq n} \frac{\langle k|p|n\rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} |k\rangle \\ &= i\lambda \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m}} \left( -\frac{\sqrt{n}}{E_n^{(0)} - E_{n-1}^{(0)}} |(n-1)^{(0)}\rangle + \frac{\sqrt{n+1}}{E_n^{(0)} - E_{n+1}^{(0)}} |(n+1)^{(0)}\rangle \right) \\ &= -i \frac{\lambda}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \left( \sqrt{n+1} |(n+1)^{(0)}\rangle + \sqrt{n} |(n-1)^{(0)}\rangle \right) . \end{aligned} \quad (6)$$

È possibile trovare una relazione **esatta** tra le autofunzioni della Hamiltoniana perturbata  $H(x, p)$  e quelle della Hamiltoniana imperturbata  $H_0(x, p)$ . Essendo  $H(x, p) = H_0(x, P) - \lambda^2/(2m)$ , le autofunzioni di  $H(x, p)$  sono le stesse di  $H_0(x, P)$ , le quali soddisfano l'equazione agli autovalori

$$\left( \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right) \Psi_n(x) = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \Psi_n(x) ,$$

dove  $P = p + \lambda$ . Osserviamo ora che

$$(p + \lambda) \left( e^{-i\lambda x/\hbar} \psi(x) \right) = \left( -i\hbar \frac{d}{dx} + \lambda \right) \left( e^{-i\lambda x/\hbar} \psi(x) \right) = e^{-i\lambda x/\hbar} \left( p \psi(x) \right) ,$$

da cui segue che

$$P^2 \left( e^{-i\lambda x/\hbar} \psi(x) \right) = (p + \lambda)^2 \left( e^{-i\lambda x/\hbar} \psi(x) \right) = e^{-i\lambda x/\hbar} \left( p^2 \psi(x) \right) .$$

Quindi, se poniamo

$$\Psi_n(x) = e^{-i\lambda x/\hbar} \psi_n(x) , \quad (7)$$

l'equazione agli autovalori per  $H_0(x, P)$  si riduce a quella per  $H_0(x, p)$ ,

$$\left( \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right) \psi_n(x) = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \psi_n(x) ,$$

che è senz'altro soddisfatta. In definitiva, la relazione tra le autofunzioni perturbate e quelle esatte è data dalla (7). Se si sviluppa al I ordine in  $\lambda$ , essa diventa

$$\Psi_n(x) = \psi_n(x) - i \frac{\lambda x}{\hbar} \psi_n(x) + \dots , \quad (8)$$

che va confrontata con la (6). Per semplicità limitiamoci al caso  $n = 0$ : dalla (6) abbiamo

$$\Psi_0(x) = \psi_0(x) - i \frac{\lambda}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \psi_1(x) = \psi_0(x) - i \frac{\lambda x}{\hbar} \psi_0(x) ,$$

in accordo con la (8).

2. I livelli energetici di un oscillatore armonico unidimensionale sono dati da

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A ciascuno di essi corrisponde l'autofunzione  $\psi_n(x)$ .

Per un sistema di  $N$  fermioni identici soggetti a potenziale di tipo armonico unidimensionale, gli stati di energia definita sono quelli in cui ciascun livello energetico  $E_n$  è occupato al più da una sola particella. Di conseguenza, lo stato di energia più bassa è quello in cui sono occupati con una particella i primi  $N$  livelli energetici dell'oscillatore. Questo stato è non-degenere e la sua energia è data da

$$\mathcal{E}_0 = \sum_{n=0}^{N-1} \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \frac{N^2}{2}.$$

Il primo livello eccitato è quello in cui sono occupati con una particella i primi  $N - 1$  livelli ed il livello  $(N + 1)$ -esimo. Anche questo stato è non degenere e la sua energia è data da

$$\mathcal{E}_1 = \sum_{n=0}^{N-2} \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega \left( N + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left( \frac{N^2}{2} + 1 \right).$$

Il secondo livello eccitato può essere realizzato in due modi diversi: (i) sono occupati con una particella i primi  $N - 1$  livelli ed il livello  $(N + 2)$ -esimo, (ii) sono occupati con una particella i primi  $N - 2$  livelli ed i livelli  $N$ -esimo ed  $(N + 1)$ -esimo. Questo stato è doppiamente degenere e la sua energia è data da

$$\mathcal{E}_2 = \sum_{n=0}^{N-2} \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega \left( N + 1 + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left( \frac{N^2}{2} + 2 \right).$$

L'autofunzione corrispondente al livello fondamentale è data da

$$\Psi_0(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left[ \psi_0(x_1)\psi_1(x_2)\cdots\psi_{N-1}(x_N) + \text{antisimmetrizzazione} \right]$$

Analogamente si costruiscono quelle relative al I e al II livello eccitato.

La perturbazione

$$V = \lambda \sum_{i,j;i \neq j}^N \delta(x_i - x_j).$$

non produce alcuno spostamento dei livelli energetici, essendo nulli tutti gli elementi di matrice di  $V$  tra stati con energia definita. Ciò è immediato da verificare, poiché la perturbazione  $V$  è diversa da zero solo quando due coordinate coincidono, ma in tali punti le autofunzioni dell'energia sono nulle per l'antisimmetria.

3. Ricordando che

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2,$$

e che

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad \frac{\vec{p}}{\mu} = \frac{\vec{p}_1}{m_1} - \frac{\vec{p}_2}{m_2},$$

dove  $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$  è la massa ridotta del sistema, è immediato verificare che vale

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 \equiv (\vec{r}_1 \times \vec{p}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{p}_2) = (\vec{R} \times \vec{P}) + (\vec{r} \times \vec{p}) \equiv \vec{L} + \vec{l}.$$

La funzione d'onda del sistema di due particelle in rappresentazione delle coordinate,  $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ , può essere scritta in termini delle coordinate del centro di massa e della posizione relativa nella forma seguente:

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \Psi(\vec{R})\phi(\vec{r}) .$$

Se le due particelle sono identiche, esse hanno la stessa massa,  $m_1 = m_2 = m$ , e lo scambio  $1 \leftrightarrow 2$  corrisponde alle trasformazioni  $\vec{R} \rightarrow \vec{R}$  e  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ . Pertanto, la simmetria di scambio si identifica con la parità rispetto a  $\vec{r}$ . Se le particelle hanno spin nullo sono bosoni e la loro funzione d'onda deve essere simmetrica rispetto allo scambio tra le particelle, cioè  $\phi(\vec{r})$  deve essere **pari** rispetto a  $\vec{r}$ . Se inoltre  $\phi(\vec{r})$  rappresenta la funzione d'onda di uno stato di momento angolare relativo  $\vec{l}$  definito, il numero quantico  $l$  deve essere necessariamente pari.

## II prova di recupero, 13 settembre 2006

1. I livelli energetici di una buca unidimensionale infinita di ampiezza  $a$  sono dati da

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8ma^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

A ciascuno di essi corrisponde l'autofunzione  $\psi_n(x)$ .

Per un sistema di tre fermioni identici in una buca di potenziale infinita, gli stati di energia definita sono quelli in cui ciascun livello energetico  $E_n$  è occupato al più da una sola particella. Di conseguenza, lo stato di energia più bassa è quello in cui sono occupati con un particella i primi tre livelli energetici della buca. Questo stato è non-degenere e la sua energia è data da

$$\mathcal{E}_0 = \sum_{n=1,2,3} n^2 \frac{h^2}{8ma^2} = 14 \frac{h^2}{8ma^2}.$$

Il primo livello eccitato è quello in cui sono occupati con una particella i primi due livelli ed il quarto livello. Anche questo stato è non degenere e la sua energia è data da

$$\mathcal{E}_1 = \sum_{n=1,2,4} n^2 \frac{h^2}{8ma^2} = 21 \frac{h^2}{8ma^2}.$$

Il secondo livello eccitato è quello in cui sono occupati con una particella il livello fondamentale ed i livelli terzo e quarto. Anche questo stato è non degenere e la sua energia è data da

$$\mathcal{E}_2 = \sum_{n=1,3,4} n^2 \frac{h^2}{8ma^2} = 26 \frac{h^2}{8ma^2}.$$

La differenza rispetto al caso di potenziale armonico unidimensionale (Problema 2 del 17 luglio 2006) è dovuta al fatto che in questo caso i livelli non sono equispaziati.

L'autofunzione corrispondente al livello fondamentale è data da

$$\Psi_0(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[ \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_3(x_3) + \text{antisimmetrizzazione} \right]$$

Analogamente si costruiscono quelle relative al I e al II livello eccitato.

La perturbazione

$$V = \lambda \sum_{i,j;i \neq j}^3 \delta(x_i - x_j).$$

non produce alcuno spostamento dei livelli energetici, essendo nulli tutti gli elementi di matrice di  $V$  tra stati con energia definita. Ciò è immediato da verificare, poiché la perturbazione  $V$  è diversa da zero solo quando due coordinate coincidono, ma in tali punti le autofunzioni dell'energia sono nulle per l'antisimmetria.

2. Osserviamo innanzitutto che con le componenti del vettore  $\vec{r}$  è possibile costruire il tensore sferico di rango 2 le cui componenti sono date da

$$\begin{aligned} T_{\pm 2}^{(2)} &= \frac{1}{2}(x \pm iy)^2, \\ T_{\pm 1}^{(2)} &= \mp(x \pm iy)z, \\ T_0^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(3z^2 - r^2), \end{aligned}$$



da cui segue che

$$xy = \frac{T_2^{(2)} - T_{-2}^{(2)}}{2i} .$$

Dalla regola di  $m$ -selezione (Sakurai, (3.10.28)) segue che l'operatore  $z^2$  ha elementi di matrice non nulli tra stati con lo stesso valore della terza componente del momento angolare, mentre l'operatore  $xy$  ha elementi di matrice non nulli tra stati le cui terze componenti del momento angolare differiscono di 2 in valore assoluto.

Il teorema di Wigner-Eckart (Sakurai, (3.10.31)) mette in relazione tra di loro tutti gli elementi di matrice delle componenti di un tensore sferico di rango  $k$ :

$$\langle \alpha', j' m' | T_q^{(k)} | \alpha, j m \rangle = \left( \langle j m | \langle k q | \right) | j' m' \rangle \frac{\langle \alpha' j' || T^{(k)} || \alpha j \rangle}{\sqrt{2j+1}} .$$

Nel nostro caso questa formula conduce a

$$\begin{aligned} & \langle n' = 3, l' = 2, m' = q | T_q^{(2)} | n = 1, l = 0, m = 0 \rangle \\ &= \left( \langle l = 0, m = 0 | \langle k = 2, q | \right) | l' = 2, m' = q \rangle \frac{\langle n' = 3, l' = 2 || T^{(2)} || n = 1, l = 0 \rangle}{\sqrt{2l+1}} , \end{aligned}$$

dove  $q = \pm 2, \pm 1, 0$  (gli elementi di matrice con  $l' \neq 2$  o con  $m' \neq q$  sono nulli). Il secondo fattore al II membro è il cosiddetto elemento di matrice ridotto (EMR),

$$(\text{EMR}) \equiv \frac{\langle n' = 3, l' = 2 || T^{(2)} || n = 1, l = 0 \rangle}{\sqrt{2l+1}} .$$

Se calcoliamo uno degli elementi di matrice non nulli dell'operatore  $T_0^{(2)}$ , possiamo esprimere tutti gli elementi di matrice di  $xy$  in termini di questo. Consideriamo allora l'elemento di matrice

$$\begin{aligned} & \langle n' = 3, l' = 2, m' = 0 | T_0^{(2)} | n = 1, l = 0, m = 0 \rangle \\ &= \left( \langle l = 0, m = 0 | \langle k = 2, q = 0 | \right) | l' = 2, m' = 0 \rangle \frac{\langle n' = 3, l' = 2 || T^{(2)} || n = 1, l = 0 \rangle}{\sqrt{2l+1}} \\ &\equiv \left( \langle l = 0, m = 0 | \langle k = 2, q = 0 | \right) | l' = 2, m' = 0 \rangle \cdot (\text{EMR}) \\ &= (\text{EMR}) , \end{aligned}$$

da cui troviamo che

$$(\text{EMR}) = \langle n' = 3, l' = 2, m' = 0 | T_0^{(2)} | n = 1, l = 0, m = 0 \rangle .$$

Calcoliamo ora tutti gli elementi di matrice non nulli di  $xy = (T_2^{(2)} - T_{-2}^{(2)})/(2i)$ . Essi sono dati da

$$\begin{aligned} & \left\langle n' = 3, l' = 2, m' = 2 \left| \frac{T_2^{(2)} - T_{-2}^{(2)}}{2i} \right| n = 1, l = 0, m = 0 \right\rangle \\ &= \frac{1}{2i} \left( \langle l = 0, m = 0 | \langle k = 2, q = +2 | \right) | l' = 2, m' = 2 \rangle \frac{\langle n' = 3, l' = 2 || T^{(2)} || n = 1, l = 0 \rangle}{\sqrt{2l+1}} \\ &= \frac{1}{2i} \left( \langle l = 0, m = 0 | \langle k = 2, q = +2 | \right) | l' = 2, m' = 2 \rangle \cdot (\text{EMR}) , \\ &= \frac{1}{2i} \cdot (\text{EMR}) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\langle n' = 3, l' = 2, m' = -2 \left| \frac{T_2^{(2)} - T_{-2}^{(2)}}{2i} \right| n = 1, l = 0, m = 0 \right\rangle \\
&= -\frac{1}{2i} \left( \langle l = 0, m = 0 | \langle k = 2, q = -2 | \right) | l' = 2, m' = -2 \rangle \cdot (\text{EMR}) , \\
&= -\frac{1}{2i} \cdot (\text{EMR}) .
\end{aligned}$$

Ciascuno di questi elementi di matrice è espresso, attraverso (EMR), in termini dell'unico elemento di matrice supposto noto,

$$\langle n' = 3, l' = 2, m' = 0 | T_0^{(2)} | n = 1, l = 0, m = 0 \rangle .$$

3. Per il teorema della proiezione (Sakurai, (3.10.40)) abbiamo

$$\langle L_z \rangle = \frac{\langle \vec{J} \cdot \vec{L} \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \langle J_z \rangle = \frac{1}{2} \frac{\langle \vec{J}^2 + \vec{L}^2 - \vec{S}^2 \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \langle J_z \rangle ,$$

dove i valori medi vanno calcolati sullo stato  $|l = 3, s = 1/2; j = 7/2, m = 3/2\rangle$ . Abbiamo quindi

$$\langle L_z \rangle = \frac{\hbar^2 \frac{7}{2} \left( \frac{7}{2} + 1 \right) + 3(3+1) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right)}{\hbar^2 \frac{7}{2} \left( \frac{7}{2} + 1 \right)} \hbar \frac{3}{2} = \hbar \frac{9}{7} .$$

Analogamente,

$$\langle S_z \rangle = \frac{\langle \vec{J} \cdot \vec{S} \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \langle J_z \rangle = \frac{1}{2} \frac{\langle \vec{J}^2 - \vec{L}^2 + \vec{S}^2 \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \langle J_z \rangle ,$$

dove i valori medi vanno calcolati sullo stato  $|l = 3, s = 1/2; j = 7/2, m = 3/2\rangle$ . Abbiamo quindi

$$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar^2 \frac{7}{2} \left( \frac{7}{2} + 1 \right) - 3(3+1) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right)}{\hbar^2 \frac{7}{2} \left( \frac{7}{2} + 1 \right)} \hbar \frac{3}{2} = \hbar \frac{3}{14} .$$

**Prova finale, 28 marzo 2007**

1. Dette  $\psi_0(x)$  e  $\psi_1(x)$  rispettivamente le funzioni d'onda dello stato fondamentale e del I stato eccitato, la funzione d'onda del sistema delle due particelle identiche è data da

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_0(x_1)\psi_1(x_2) \pm \psi_1(x_1)\psi_0(x_2)] ,$$

dove il segno “+” (combinazione simmetrica) vale nel caso di stato di singoletto di spin e il segno “-” (combinazione antisimmetrica) nel caso di stato di tripletto di spin.

Risulta allora

$$\begin{aligned} \langle x_1 x_2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi_0^*(x_1)\psi_1^*(x_2) \pm \psi_1^*(x_1)\psi_0^*(x_2) \right) x_1 x_2 \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi_0(x_1)\psi_1(x_2) \pm \psi_1(x_1)\psi_0(x_2) \right) \\ &= \pm \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \psi_0^*(x_1) x_1 \psi_1(x_1) \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \psi_1^*(x_2) x_2 \psi_0(x_2) \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \psi_1^*(x_1) x_1 \psi_0(x_1) \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \psi_0^*(x_2) x_2 \psi_1(x_2) \right] \\ &= \pm |\langle 0|x|1 \rangle|^2 = \pm \frac{\hbar}{2m\omega} , \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che  $\langle 0|x|0 \rangle = \langle 1|x|1 \rangle = 0$  per parità e i bracket utilizzati si riferiscono al sistema di una particella.

Il risultato ottenuto non deve sorprendere:  $-2\langle x_1 x_2 \rangle$  è uno dei contributi a  $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$ ; esso è negativo (positivo) nel caso di singoletto (tripletto), come deve essere (vedere Problema 3 del 7 settembre 2005).

2. Poiché un elemento di matrice dell'operatore  $\hat{x}\hat{y}$  tra stati imperturbati dell'atomo di idrogeno è dell'ordine di  $a^2$ , con  $a$  il raggio di Bohr,  $V$  può essere trattato come perturbazione se  $V_0$  è piccolo rispetto alla separazione tipica tra due livelli energetici contigui dell'atomo di idrogeno non-relativistico, che è dell'ordine di  $e^2/a$ .

Poi,  $\hat{x}\hat{y}$  può essere scritto come  $T_{+2}^{(2)} - T_{-2}^{(2)}$ , dove  $T_q^{(2)}$  è un tensore sferico di rango 2 (vedere Problema 2 del 14 luglio 2004). Questo consente di individuare immediatamente gli elementi di matrice non nulli di  $V$  tra autostati imperturbati dell'atomo di idrogeno. Se adottiamo per questi ultimi la consueta rappresentazione  $|n, l, m\rangle$  e ricordiamo la regola di  $m$ -selezione (Sakurai, (3.10.28)) ed il teorema di Wigner-Eckart (Sakurai, (3.10.31)), troviamo subito che

$$\langle 1, 0, 0 | V | 1, 0, 0 \rangle = 0 ,$$

cioè il livello fondamentale non subisce spostamento al I ordine in teoria delle perturbazioni, e che gli unici elementi di matrice non nulli tra autostati con  $n = 2$  sono

$$\langle 2, 1, 1 | V | 2, 1, -1 \rangle \equiv A$$

ed il suo complesso coniugato. Poiché  $A$  è immaginario puro (vedere sotto), gli autovalori della matrice rappresentativa della perturbazione sul livello  $n = 2$  sono 0 (2 volte) e  $\pm iA$ . I relativi autostati sono, rispettivamente,  $|2, 1, 0\rangle$ ,  $|2, 0, 0\rangle$  e

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |2, 1, 1\rangle \pm i |2, 1, -1\rangle \right] .$$

Per completare la soluzione, occorre ora calcolare  $A$ :

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \left( R_{21}(r) Y_1^1(\theta, \phi) \right)^* \left( \frac{V_0}{a^2} r^2 \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi \right) \\
 &\times \left( R_{21}(r) Y_{-1}^1(\theta, \phi) \right) \\
 &= -\frac{3}{8\pi} \frac{V_0}{a^2} \int_0^\infty r^4 R_{21}^2(r) dr \int_0^\pi \sin^5 \theta d\theta \int_0^{2\pi} e^{-2i\phi} \cos \phi \sin \phi d\phi \\
 &= \frac{3}{8\pi} \frac{V_0}{a^2} \int_0^\infty r^4 R_{21}^2(r) dr \times \frac{16}{15} \times i \frac{\pi}{2} = i \frac{V_0}{5a^2} \int_0^\infty r^4 R_{21}^2(r) dr .
 \end{aligned}$$

L'integrale residuo in  $r$  può essere estratto dalla formula data nel testo. Ponendo  $n = 2$  ed  $l = 1$ , essa conduce a

$$\langle 2, 1, 0 | r^2 | 2, 1, 0 \rangle = 30a^2 .$$

D'altro canto,

$$\begin{aligned}
 \langle 2, 1, 0 | r^2 | 2, 1, 0 \rangle &= \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 |R_{21}(r) Y_0^1(\theta, \phi)|^2 \\
 &= \frac{3}{4\pi} \int_0^\infty r^4 R_{21}^2(r) dr \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
 &= \frac{3}{4\pi} \int_0^\infty r^4 R_{21}^2(r) dr \times \frac{2}{3} \times 2\pi = \int_0^\infty r^4 R_{21}^2(r) dr .
 \end{aligned}$$

In definitiva,

$$A = i \frac{V_0}{5a^2} 30a^2 = 6i V_0 .$$

3. Gli autostati con  $n = 2$  dell'atomo di idrogeno possono essere scelti come autostati simultanei di  $\vec{J}^2$ ,  $J_z$ ,  $\vec{L}^2$ ,  $\vec{S}^2$ , prendendo le opportune combinazioni lineari tra gli stati con  $\vec{L}^2$  ed  $L_z$  definito e gli stati di definito spin. Abbiamo allora i seguenti 8 autostati degeneri:

$$\begin{aligned}
 \left| n = 2, j = \frac{3}{2}, m; l = 1; s = \frac{1}{2} \right\rangle , & \quad 4 \text{ stati,} \quad \left( m = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right) , \\
 \left| n = 2, j = \frac{1}{2}, m; l = 1; s = \frac{1}{2} \right\rangle , & \quad 2 \text{ stati,} \quad \left( m = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) , \\
 \left| n = 2, j = \frac{1}{2}, m; l = 0; s = \frac{1}{2} \right\rangle , & \quad 2 \text{ stati,} \quad \left( m = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) ,
 \end{aligned}$$

La perturbazione può essere riscritta nella forma

$$V = \frac{eB}{2m_e c} (J_z + S_z) .$$

Il primo termine,  $eB/(2m_e c) J_z$ , è manifestamente diagonale rispetto alla base scelta e produce su ciascun autostato uno spostamento pari a  $eB/(2m_e c) \times \hbar m$ . Il secondo termine,  $eB/(2m_e c) S_z$ , in virtù del teorema della proiezione (Sakurai, (3.10.40)) è anch'esso diagonale rispetto alla base utilizzata ed, in particolare,

$$\begin{aligned}
 \langle S_z \rangle &= \frac{\langle \vec{J} \cdot \vec{S} \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \langle J_z \rangle = \frac{1}{2} \frac{\langle \vec{J}^2 - \vec{L}^2 + \vec{S}^2 \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \langle J_z \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \frac{j(j+1) - l(l+1) + 3/4}{j(j+1)} \times \hbar m .
 \end{aligned}$$

Pertanto, abbiamo,

$$\begin{aligned}\left\langle n = 2, j = \frac{3}{2}, m; l = 1; s = \frac{1}{2} \middle| V \middle| n = 2, j = \frac{3}{2}, m; l = 1; s = \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{eB}{2m_e c} \left( \hbar m + \frac{1}{3} \hbar m \right), \\ \left\langle n = 2, j = \frac{1}{2}, m; l = 1; s = \frac{1}{2} \middle| V \middle| n = 2, j = \frac{1}{2}, m; l = 1; s = \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{eB}{2m_e c} \left( \hbar m - \frac{1}{3} \hbar m \right), \\ \left\langle n = 2, j = \frac{1}{2}, m; l = 0; s = \frac{1}{2} \middle| V \middle| n = 2, j = \frac{1}{2}, m; l = 0; s = \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{eB}{2m_e c} (\hbar m + \hbar m).\end{aligned}$$

Considerando i possibili valori di  $m$  nelle tre espressioni di sopra, si può vedere che la degenerazione è completamente rimossa.

## I prova di recupero, 18 luglio 2007

1. Le energie e le autofunzioni del sistema imperturbato sono date rispettivamente da

$$E_{nm}^{(0)} = \frac{\hbar^2}{8ma^2}(n^2 + m^2),$$

$$\psi_{nm}^{(0)}(x, y) = \psi_n^{(0)}(x)\psi_m^{(0)}(y), \quad n, m = 1, 2, \dots$$

Il livello fondamentale è realizzato per  $n = m = 1$  ed è non degenere; la corrispondente autofunzione è  $\psi_{11}^{(0)}(x, y)$ . Il I livello eccitato è realizzato per  $n = 1, m = 2$  e per  $n = 2, m = 1$ , pertanto è doppiamente degenere; le corrispondenti autofunzioni sono  $\psi_{21}^{(0)}(x, y)$  e  $\psi_{12}^{(0)}(x, y)$ . Indicando con  $|n, m\rangle$  il ket corrispondente all'autofunzione  $\psi_{n,m}^{(0)}(x, y)$ , lo spostamento del livello fondamentale al I ordine perturbativo è dato da

$$\begin{aligned} \langle 1, 1|V|1, 1\rangle &= \int_0^a dx \int_0^a dy A \delta\left(x - \frac{a}{4}\right) \delta\left(y - \frac{3a}{4}\right) |\psi_1(x)|^2 |\psi_1(y)|^2 \\ &= A \left| \psi_1\left(\frac{a}{4}\right) \right|^2 \left| \psi_1\left(\frac{3a}{4}\right) \right|^2 = A \frac{4}{a^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{A}{a^2}. \end{aligned}$$

Poiché il I livello eccitato è degenere, dobbiamo costruire la matrice rappresentativa della perturbazione rispetto alla base degli autostati imperturbati,

$$\begin{pmatrix} \langle 1, 2|V|1, 2\rangle & \langle 1, 2|V|2, 1\rangle \\ \langle 2, 1|V|1, 2\rangle & \langle 2, 1|V|2, 1\rangle \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di questa matrice forniranno gli spostamenti energetici al I ordine perturbativo. L'elemento generico di questa matrice è dato da

$$\begin{aligned} \langle n, m|V|n', m'\rangle &= \int_0^a dx \int_0^a dy \psi_n^*(x)\psi_m^*(y) A \delta\left(x - \frac{a}{4}\right) \delta\left(y - \frac{3a}{4}\right) \psi_{n'}(x)\psi_{m'}(y) \\ &= A \psi_n\left(\frac{a}{4}\right) \psi_m\left(\frac{3a}{4}\right) \psi_{n'}\left(\frac{a}{4}\right) \psi_{m'}\left(\frac{3a}{4}\right) \\ &= A \frac{4}{a^2} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{3m\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{n'\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{3m'\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

La matrice della perturbazione risulta essere allora

$$\frac{2A}{a^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

i cui autovalori sono 0 e  $4A/a^2$ , con autovettori dati rispettivamente da

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |1, 2\rangle \pm |2, 1\rangle \right].$$

2. L'operatore  $\hat{x}\hat{z}$  può essere scritto come  $T_{-1}^{(2)} - T_1^{(2)}$ , dove  $T_q^{(2)}$  è un tensore sferico di rango 2 (vedere Problema 2 del 14 luglio 2004). Questo consente di individuare immediatamente gli elementi di matrice non nulli di  $V$  tra autostati imperturbati del livello  $n = 2$  dell'atomo di idrogeno. Se adottiamo la consueta rappresentazione  $|n, l, m\rangle$  e ricordiamo la regola di  $m$ -selezione (Sakurai, (3.10.28)) ed il teorema di Wigner-Eckart (Sakurai, (3.10.31)), troviamo subito che gli unici elementi di matrice non nulli tra autostati con  $n = 2$  sono

$$\begin{aligned} \langle 2, 1, 1|V|2, 1, 0\rangle &\equiv C_1 \\ \langle 2, 1, -1|V|2, 1, 0\rangle &\equiv C_2 \end{aligned}$$

ed i loro complessi coniugati. Al primo elemento di matrice contribuisce  $T_1^{(2)}$ , al secondo  $T_{-1}^{(2)}$ . Il teorema di Wigner-Eckart stabilisce inoltre che i due elementi di matrice  $C_1$  e  $C_2$  sono proporzionali ad un elemento di matrice ridotto con costanti di proporzionalità date da

$$\left( \langle l = 1, m = 0 | \langle k = 2, q = 1 | \right) | l' = 1, m' = 1 \rangle ,$$

e

$$\left( \langle l = 1, m = 0 | \langle k = 2, q = -1 | \right) | l' = 1, m' = -1 \rangle ,$$

rispettivamente. Poiché questi ultimi bracket sono identici, come si può verificare consultando una tabella di coefficienti di Clebsch-Gordan, si deve concludere che  $C_1 = C_2$ . È inoltre immediato verificare che  $C_1$  è reale: per vederlo, basta scrivere l'elemento di matrice che definisce  $C_1$  in rappresentazione delle coordinate e considerare solo l'integrazione sulla variabile azimutale  $\phi$ , che è l'unica possibile sorgente di termini immaginari.

In definitiva, la matrice della perturbazione ha la seguente struttura

$$\begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

avendo ordinato gli autostati nel modo seguente:  $|2, 1, 1\rangle, |2, 1, 0\rangle, |2, 1, -1\rangle, |2, 0, 0\rangle$ . Per trovare gli autovettori di questa matrice non è necessario conoscere il valore della costante reale  $C_1$ . Essi sono:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{con autovalore } 0 ,$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \sqrt{2} \\ \pm 1 \end{pmatrix} \quad \text{con autovalore } \pm C_1 .$$

3. Poiché le particelle identiche sono fermioni, la funzione d'onda del sistema deve essere complessivamente antisimmetrica. Ciò implica che la funzione d'onda spaziale del sistema deve essere simmetrica quando lo stato di spin totale è di singoletto (antisimmetrico) e deve essere antisimmetrica quando lo stato di spin totale è di tripletto (simmetrico). Le due possibilità possono essere scritte in un'unica soluzione, nel modo seguente:

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \pm \psi_2(x_1)\psi_1(x_2) \right] ,$$

dove il segno “+” (combinazione simmetrica) vale nel caso di stato di singoletto di spin e il segno “-” (combinazione antisimmetrica) nel caso di stato di tripletto di spin.

Il valor medio cercato è dato da

$$\begin{aligned} \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi_1^*(x_1)\psi_2^*(x_2) \pm \psi_2^*(x_1)\psi_1^*(x_2) \right) (x_1 - x_2)^2 \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \pm \psi_2(x_1)\psi_1(x_2) \right) . \end{aligned}$$

Dopo un po' di algebra, si trova

$$\begin{aligned} \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle &= \langle \psi_1 | x^2 | \psi_1 \rangle + \langle \psi_2 | x^2 | \psi_2 \rangle - 2 \langle \psi_1 | x | \psi_1 \rangle \langle \psi_2 | x | \psi_2 \rangle \\ &\pm 2 \langle \psi_1 | x^2 | \psi_2 \rangle \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle \mp 2 |\langle \psi_1 | x | \psi_2 \rangle|^2 . \end{aligned}$$

I valori medi nel secondo membro dell'espressione precedente sono riferiti a stati di singola particella e possono essere calcolati facilmente:

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_2^*(x) \psi_1(x) = \frac{1}{a} \int_{-a/4}^{a/4} dx = \frac{1}{2}, \\
 \langle \psi_1 | x | \psi_1 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx x |\psi_1(x)|^2 = \frac{1}{a} \int_{-a/4}^{3a/4} dx x = \frac{a}{4}, \\
 \langle \psi_2 | x | \psi_2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx x |\psi_2(x)|^2 = \frac{1}{a} \int_{-3a/4}^{a/4} dx x = -\frac{a}{4}, \\
 \langle \psi_1 | x | \psi_2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx x \psi_1^*(x) \psi_2(x) = \frac{1}{a} \int_{-a/4}^{a/4} dx x = 0, \\
 \langle \psi_1 | x^2 | \psi_1 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 |\psi_1(x)|^2 = \frac{1}{a} \int_{-a/4}^{3a/4} dx x^2 = \frac{7}{48} a^2, \\
 \langle \psi_2 | x^2 | \psi_2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 |\psi_2(x)|^2 = \frac{1}{a} \int_{-3a/4}^{a/4} dx x^2 = \frac{7}{48} a^2, \\
 \langle \psi_1 | x^2 | \psi_2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 \psi_1^*(x) \psi_2(x) = \frac{1}{a} \int_{-a/4}^{a/4} dx x^2 = \frac{1}{96} a^2.
 \end{aligned}$$



## II prova di recupero, 12 settembre 2007

1. Osserviamo innanzitutto che la condizione sotto la quale  $V(x)$  può essere trattato come una perturbazione è che il valore assoluto di un suo elemento di matrice tipico tra autostati imperturbati del sistema, che è dell'ordine di  $\lambda/a$ , sia molto più piccolo della separazione tipica tra i livelli energetici imperturbati. Nel caso in questione, la più piccola separazione tra i livelli imperturbati è proprio quella tra  $E_2^{(0)}$  ed  $E_1^{(0)}$ , quindi deve essere

$$\frac{\lambda}{a} \ll E_2^{(0)} - E_1^{(0)} .$$

Al I ordine in teoria delle perturbazioni lo spostamento energetico  $\Delta_n^{(1)}$  del livello  $n$ -esimo è dato da

$$\Delta_n^{(1)} = \langle \psi_n^{(0)} | V(x) | \psi_n^{(0)} \rangle , \quad n = 1, 2, 3, \dots ,$$

che conduce a

$$\begin{aligned} \Delta_1^{(1)} &= \int_0^a V(x) |\psi_1^{(0)}(x)|^2 dx = \int_0^a \lambda \delta \left( x - \frac{a}{2} \right) \frac{2}{a} \sin^2 \left( \frac{\pi}{a} x \right) dx = \frac{2\lambda}{a} , \\ \Delta_2^{(1)} &= \int_0^a V(x) |\psi_2^{(0)}(x)|^2 dx = \int_0^a \lambda \delta \left( x - \frac{a}{2} \right) \frac{2}{a} \sin^2 \left( \frac{2\pi}{a} x \right) dx = 0 . \end{aligned}$$

I primi due livelli energetici perturbati,

$$\begin{aligned} E_1^{(1)} &= E_1^{(0)} + \Delta_1^{(1)} = E_1^{(0)} + \frac{2\lambda}{a} , \\ E_2^{(1)} &= E_2^{(0)} + \Delta_2^{(1)} = E_2^{(0)} , \end{aligned}$$

risultano evidentemente degeneri quando

$$\frac{2\lambda}{a} = E_2^{(0)} - E_1^{(0)} .$$

È evidente, però, che per questo valore di  $\lambda$  è violata la condizione di applicabilità della teoria delle perturbazioni. In definitiva, non è possibile trarre alcuna conclusione sulla degenerazione dei primi due livelli energetici da un calcolo perturbativo a fissato ordine.

2. Gli elementi diversi da zero dell'operatore  $V$  tra autostati  $|n = 3, l, m\rangle$  dell'atomo di idrogeno sono gli stessi determinati nella soluzione del Problema 3 del 14 aprile 2005. Poiché sono nulli gli elementi di matrice tra stati con diverso valore di  $m$ , la matrice rappresentativa della perturbazione sugli stati del livello  $n = 3$  sarà diagonale a blocchi, se si ordinano gli stati mettendo insieme quelli con lo stesso valore di  $m$ . Per brevità, riportiamo solo i blocchi relativi a ciascun autospazio con  $m$  fissato:

$$m = 0 , \quad \text{stati } |n = 3, 2, 0\rangle , |n = 3, 1, 0\rangle , |n = 3, 0, 0\rangle ; \quad \begin{pmatrix} 0 & A^* & 0 \\ A & 0 & B^* \\ 0 & B & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$m = 1 , \quad \text{stati } |n = 3, 2, 1\rangle , |n = 3, 1, 1\rangle , \quad \begin{pmatrix} 0 & C^* \\ C & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$m = -1 , \quad \text{stati } |n = 3, 2, -1\rangle , |n = 3, 1, -1\rangle , \quad \begin{pmatrix} 0 & D^* \\ D & 0 \end{pmatrix} ,$$

dove i due blocchi  $1 \times 1$  relativi a  $m = \pm 2$  sono stati omissi perché identicamente nulli. Gli autovalori della prima matrice sono  $\{0, \pm\sqrt{|A|^2 + |B|^2}\}$ , quelli della seconda  $\{\pm|C|\}$ , quelli della terza  $\{\pm|D|\}$ .

Per discutere in che misura la degenerazione è rimossa al I ordine in teoria perturbativa, è necessario trovare come si confrontano tra di loro gli autovalori trovati, tenendo conto delle relazioni tra gli elementi di matrice  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  indotte dal teorema di Wigner-Eckart (Sakurai, (3.10.31)). A tal proposito, ricordando che  $V$  si comporta come la componente 0 di un tensore sferico di rango 1, abbiamo che

$$\begin{aligned}
A &\equiv \langle 3, l' = 1, m' = 0 | T_0^{(1)} | 3, l = 2, m = 0 \rangle \\
&= \left( \langle 2, 0 | \langle 1, 0 | \right) | 1, 0 \rangle \frac{\langle 3, l' = 1 | | T^{(1)} | | 3, l = 2 \rangle}{\sqrt{2l + 1}}, \\
B &\equiv \langle 3, l' = 0, m' = 0 | T_0^{(1)} | 3, l = 1, m = 0 \rangle \\
&= \left( \langle 1, 0 | \langle 1, 0 | \right) | 0, 0 \rangle \frac{\langle 3, l' = 0 | | T^{(1)} | | 3, l = 1 \rangle}{\sqrt{2l + 1}}, \\
C &\equiv \langle 3, l' = 1, m' = 1 | T_0^{(1)} | 3, l = 2, m = 1 \rangle \\
&= \left( \langle 2, 1 | \langle 1, 0 | \right) | 1, 1 \rangle \frac{\langle 3, l' = 1 | | T^{(1)} | | 3, l = 2 \rangle}{\sqrt{2l + 1}}, \\
D &\equiv \langle 3, l' = 1, m' = -1 | T_0^{(1)} | 3, l = 2, m = -1 \rangle \\
&= \left( \langle 2, -1 | \langle 1, 0 | \right) | 1, -1 \rangle \frac{\langle 3, l' = 1 | | T^{(1)} | | 3, l = 2 \rangle}{\sqrt{2l + 1}}.
\end{aligned}$$

Queste espressioni mostrano che  $A$ ,  $C$  e  $D$  hanno lo stesso elemento di matrice ridotto, quindi possono essere messi in relazione tra di loro. Dalla tabella dei coefficienti di Clebsch-Gordan risulta che

$$\left( \langle 2, 1 | \langle 1, 0 | \right) | 1, 1 \rangle = \left( \langle 2, -1 | \langle 1, 0 | \right) | 1, -1 \rangle = -\sqrt{\frac{3}{10}}, \quad \left( \langle 2, 0 | \langle 1, 0 | \right) | 1, 0 \rangle = -\sqrt{\frac{2}{5}},$$

da cui segue che  $C = D = (\sqrt{3}/2)A$ .

Questo ci permette di concludere che, dei 7 autovalori trovati, abbiamo

- un autovalore nullo, a cui vanno aggiunti gli altri due autovalori nulli relativi agli stati con  $m = \pm 2$  omissi per brevità,
- due volte l'autovalore  $+|C|$ ,
- due volte l'autovalore  $-|C|$ ,
- l'autovalore  $+\sqrt{|A|^2 + |B|^2}$ ,
- l'autovalore  $-\sqrt{|A|^2 + |B|^2}$ .

Il fatto che l'autovalore  $+\sqrt{|A|^2 + |B|^2}$  non sia degenerare con  $|C|$  può essere verificato solo con il calcolo esplicito degli elementi di matrice. In definitiva, il livello  $n = 3$ , che ha degenerazione 9 in assenza di perturbazione, viene separato in 5 livelli per effetto Stark al I ordine perturbativo.

3. Il Problema posto è analogo al Problema 3 del 18 luglio 2007, con la differenza che il sistema in questione è formato da bosoni, quindi la combinazione simmetrica nella funzione d'onda

spaziale va presa nel caso di spin totale  $S=0$  oppure 2, mentre la combinazione antisimmetrica va presa nel caso di spin totale  $S=1$ . La soluzione è pertanto

$$\begin{aligned} \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle &= \langle \psi_1 | x^2 | \psi_1 \rangle + \langle \psi_2 | x^2 | \psi_2 \rangle - 2 \langle \psi_1 | x | \psi_1 \rangle \langle \psi_2 | x | \psi_2 \rangle \\ &\pm 2 \langle \psi_1 | x^2 | \psi_2 \rangle \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle \mp 2 |\langle \psi_1 | x | \psi_2 \rangle|^2 . \end{aligned}$$

I valori medi nel secondo membro dell'espressione precedente sono riferiti a stati di singola particella e possono essere calcolati facilmente:

$$\begin{aligned} \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_2^*(x) \psi_1(x) = \frac{1}{a} \int_{-a/3}^{a/3} dx = \frac{2}{3} , \\ \langle \psi_1 | x | \psi_1 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx x |\psi_1(x)|^2 = \frac{1}{a} \int_{-a/3}^{2a/3} dx x = \frac{a}{6} , \\ \langle \psi_2 | x | \psi_2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx x |\psi_2(x)|^2 = \frac{1}{a} \int_{-2a/3}^{a/3} dx x = -\frac{a}{6} , \\ \langle \psi_1 | x | \psi_2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx x \psi_1^*(x) \psi_2(x) = \frac{1}{a} \int_{-a/3}^{a/3} dx x = 0 , \\ \langle \psi_1 | x^2 | \psi_1 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 |\psi_1(x)|^2 = \frac{1}{a} \int_{-a/3}^{2a/3} dx x^2 = \frac{a^2}{9} , \\ \langle \psi_2 | x^2 | \psi_2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 |\psi_2(x)|^2 = \frac{1}{a} \int_{-2a/3}^{a/3} dx x^2 = \frac{a^2}{9} , \\ \langle \psi_1 | x^2 | \psi_2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 \psi_1^*(x) \psi_2(x) = \frac{1}{a} \int_{-a/3}^{a/3} dx x^2 = \frac{2}{81} a^2 . \end{aligned}$$

**Prova finale, 22 aprile 2008**

1. (a) Ricordando che la forma generale di un'autofunzione di  $H_0$  è

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_m^l(\theta, \phi)$$

e che le armoniche sferiche  $Y_m^l(\theta, \phi)$  sono normalizzate in modo che

$$\int d\Omega |Y_m^l(\theta, \phi)|^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta |Y_m^l(\theta, \phi)|^2 = 1,$$

il valor medio sull'autofunzione  $\psi_{nlm}$  di  $H_0$  di una qualunque funzione  $f(r)$  della sola coordinata radiale  $r$  può essere sempre scritto come segue:

$$\langle n, l, m | f(r) | n, l, m \rangle = \int_0^\infty r^2 dr f(r) [R_{nl}(r)]^2,$$

dove si è usato anche il fatto che le  $R_{nl}(r)$  sono reali.

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \langle 2, 0, 0 | \frac{1}{r} | 2, 0, 0 \rangle &= \int_0^\infty r^2 dr \frac{1}{r} [R_{20}(r)]^2 = \dots = \frac{1}{4a}, \\ \langle 2, 1, m | \frac{1}{r} | 2, 1, m \rangle &= \int_0^\infty r^2 dr \frac{1}{r} [R_{21}(r)]^2 = \dots = \frac{1}{4a}, \\ \langle 2, 0, 0 | \frac{1}{r^2} | 2, 0, 0 \rangle &= \int_0^\infty r^2 dr \frac{1}{r^2} [R_{20}(r)]^2 = \dots = \frac{1}{4a^2}, \\ \langle 2, 1, m | \frac{1}{r^2} | 2, 1, m \rangle &= \int_0^\infty r^2 dr \frac{1}{r^2} [R_{21}(r)]^2 = \dots = \frac{1}{12a^2}, \\ \langle 2, 1, m | \frac{1}{r^3} | 2, 1, m \rangle &= \int_0^\infty r^2 dr \frac{1}{r^3} [R_{21}(r)]^2 = \dots = \frac{1}{24a^3}, \end{aligned}$$

in accordo con le formule date nel testo. Tutti gli integrali di sopra si calcolano facilmente mediante il cambio di variabile  $x = r/a$  e usando

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} = n!, \quad n \text{ intero.}$$

(b) Il secondo termine di  $V$  è proporzionale a

$$\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2),$$

perciò conviene prendere come autostati del livello  $n = 2$  gli autostati simultanei di  $\vec{J}^2$ ,  $\vec{L}^2$  e  $\vec{S}^2$ :

$$\begin{aligned} \left| n = 2, j = \frac{3}{2}, m; l = 1; s = \frac{1}{2} \right\rangle, & \quad 4 \text{ stati,} \quad \left( m = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right), \\ \left| n = 2, j = \frac{1}{2}, m; l = 1; s = \frac{1}{2} \right\rangle, & \quad 2 \text{ stati,} \quad \left( m = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \\ \left| n = 2, j = \frac{1}{2}, m; l = 0; s = \frac{1}{2} \right\rangle, & \quad 2 \text{ stati,} \quad \left( m = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Per semplicità di scrittura, d'ora in poi ometteremo di trascrivere i numeri quantici  $n$  ed  $s$ , perché essi sono comuni a tutti gli autostati, ed il numero quantico  $m$ , perché inessenziale.

Avremo allora

$$\begin{aligned}
\left\langle j = \frac{3}{2}; l = 1 \left| \frac{\alpha}{2m^2 r^3 c^2} \vec{L} \cdot \vec{S} \right| j = \frac{3}{2}; l = 1 \right\rangle &= \frac{\alpha}{2m^2 c^2} \frac{\hbar^2}{2} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{3}{2} + 1 \right) - 1(1+1) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \right] \\
&\times \langle l = 1 | \frac{1}{r^3} | l = 1 \rangle = \frac{\alpha \hbar^2}{m^2 c^2} \frac{1}{96 a^3} = \frac{m \alpha^4}{96 c^2 \hbar^4}, \\
\left\langle j = \frac{1}{2}; l = 1 \left| \frac{\alpha}{2m^2 r^3 c^2} \vec{L} \cdot \vec{S} \right| j = \frac{1}{2}; l = 1 \right\rangle &= \frac{\alpha}{2m^2 c^2} \frac{\hbar^2}{2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) - 1(1+1) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \right] \\
&\times \langle l = 1 | \frac{1}{r^3} | l = 1 \rangle = -\frac{\alpha \hbar^2}{m^2 c^2} \frac{1}{48 a^3} = -\frac{m \alpha^4}{48 c^2 \hbar^4}, \\
\left\langle j = \frac{1}{2}; l = 0 \left| \frac{\alpha}{2m^2 r^3 c^2} \vec{L} \cdot \vec{S} \right| j = \frac{1}{2}; l = 0 \right\rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Il primo ed il terzo termine di  $V$  commutano anch'essi con  $\vec{J}^2$ ,  $\vec{L}^2$  e  $\vec{S}^2$ , perché non dipendono dallo spin e sono invarianti sotto rotazioni spaziali. Quindi essi risulteranno diagonali rispetto alla base degli autostati di  $\vec{J}^2$ ,  $\vec{L}^2$  e  $\vec{S}^2$ .

Per il primo termine di  $V$  avremo allora

$$\begin{aligned}
\left\langle j = \frac{3}{2}; l = 1 \left| -\frac{(\vec{p}^2)^2}{8m^3 c^2} \right| j = \frac{3}{2}; l = 1 \right\rangle &= -\frac{1}{2mc^2} \langle l = 1 | \left( H_0 + \frac{\alpha}{r} \right)^2 | l = 1 \rangle \\
&= -\frac{1}{2mc^2} \left[ (E_2^{(0)})^2 + 2E_2^{(0)} \alpha \langle l = 1 | \frac{1}{r} | l = 1 \rangle + \alpha^2 \langle l = 1 | \frac{1}{r^2} | l = 1 \rangle \right] = -\frac{7m\alpha^4}{384c^2\hbar^4}, \\
\left\langle j = \frac{1}{2}; l = 1 \left| -\frac{(\vec{p}^2)^2}{8m^3 c^2} \right| j = \frac{1}{2}; l = 1 \right\rangle &= -\frac{1}{2mc^2} \langle l = 1 | \left( H_0 + \frac{\alpha}{r} \right)^2 | l = 1 \rangle \\
&= -\frac{1}{2mc^2} \left[ (E_2^{(0)})^2 + 2E_2^{(0)} \alpha \langle l = 1 | \frac{1}{r} | l = 1 \rangle + \alpha^2 \langle l = 1 | \frac{1}{r^2} | l = 1 \rangle \right] = -\frac{7m\alpha^4}{384c^2\hbar^4}, \\
\left\langle j = \frac{1}{2}; l = 0 \left| -\frac{(\vec{p}^2)^2}{8m^3 c^2} \right| j = \frac{1}{2}; l = 0 \right\rangle &= -\frac{1}{2mc^2} \langle l = 0 | \left( H_0 + \frac{\alpha}{r} \right)^2 | l = 0 \rangle \\
&= -\frac{1}{2mc^2} \left[ (E_2^{(0)})^2 + 2E_2^{(0)} \alpha \langle l = 0 | \frac{1}{r} | l = 0 \rangle + \alpha^2 \langle l = 0 | \frac{1}{r^2} | l = 0 \rangle \right] = -\frac{13m\alpha^4}{128c^2\hbar^4},
\end{aligned}$$

Il terzo termine di  $V$  è proporzionale a  $\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ , pertanto il suo valor medio sarà diverso da zero solo sulle autofunzioni  $\psi_{2lm}(\vec{r})$  che non si annullano per  $\vec{r} = 0$ . Ciò succede solo per la  $\psi_{200}(\vec{r})$ , pertanto l'unico valor medio diverso da zero è

$$\left\langle j = \frac{1}{2}; l = 0 \left| \frac{\alpha \pi \hbar^2}{2m^2 c^2} \delta(\vec{r}) \right| j = \frac{1}{2}; l = 0 \right\rangle = \frac{\alpha \pi \hbar^2}{2m^2 c^2} |\psi_{200}(0)|^2 = \frac{m \alpha^4}{16c^2 \hbar^4}.$$

Mettendo insieme i tre contributi di  $V$ , avremo

$$\begin{aligned}
\left\langle n = 2; j = \frac{3}{2}, m; l = 1; s = \frac{1}{2} \left| V \right| n = 2; j = \frac{3}{2}, m; l = 1; s = \frac{1}{2} \right\rangle &= -\frac{m\alpha^4}{128c^2\hbar^4}, \\
\left\langle n = 2; j = \frac{1}{2}, m; l = 1; s = \frac{1}{2} \left| V \right| n = 2; j = \frac{1}{2}, m; l = 1; s = \frac{1}{2} \right\rangle &= -\frac{5m\alpha^4}{128c^2\hbar^4},
\end{aligned}$$

$$\left\langle n = 2; j = \frac{1}{2}, m; l = 0; s = \frac{1}{2} \mid V \mid n = 2; j = \frac{1}{2}, m; l = 0; s = \frac{1}{2} \right\rangle = -\frac{5m\alpha^4}{128c^2\hbar^4}.$$

Questo risultato è in accordo con la formula generale per lo spostamento energetico relativo all'autostato con  $n$  e  $j$  definiti:

$$\Delta E_{n,j} = E_n^{(0)} \frac{\alpha^2}{n^2 c^2 \hbar^2} \left( \frac{n}{j + 1/2} - \frac{3}{4} \right)$$

(Landau-Lifshitz, Fisica Teorica, vol. 4).

2. L'Hamiltoniana completa del sistema dei due fermioni identici è

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + A(x_1 - x_2)^2 \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} A(x_1 - x_2)^2 (\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2),$$

dove  $\vec{S}$  è lo spin totale. Passando alle coordinate del centro di massa e della posizione relativa e ai loro momenti coniugati,

$$\begin{aligned} X &= \frac{x_1 + x_2}{2}, & P &= p_1 + p_2, \\ x &= x_1 - x_2, & p &= \frac{p_1}{2} - \frac{p_2}{2}, \end{aligned}$$

l'Hamiltoniana prende la forma

$$H = \frac{P^2}{4m} + \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} A x^2 (\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2).$$

Questa Hamiltoniana è separabile in una Hamiltoniana,  $P^2/4m$ , che dipende solo dalle osservabili del centro di massa, e nella restante parte, che dipende solo dalle osservabili del sistema relativo e dello spin. Inoltre  $H$  commuta con  $\vec{S}^2$ ,  $S_z$ ,  $\vec{S}_1^2$  e  $\vec{S}_2^2$ . Pertanto, le autofunzioni di  $H$  devono essere della forma

$$\Phi(X, x; s, m; s_1; s_2) = \Psi(X) \psi(x) \chi(s, m; s_1, s_2),$$

dove  $\Psi(X)$  è un'autofunzione di  $P^2/4m$ , cioè un'onda piana della forma  $e^{iKX}$ , con  $K$  reale qualunque;  $\chi(s, m; s_1, s_2)$  può essere una delle seguenti autofunzioni dello spin totale:

$$\chi\left(1, m; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad m = -1, 0, 1, \quad \chi\left(0, 0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Infine, la  $\psi(x)$  è l'autofunzione dell'Hamiltoniana del sistema ridotto

$$H_r(s) = \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} A \hbar^2 x^2 \left( s(s+1) - \frac{3}{2} \right),$$

dove  $s$  può essere uguale a 0 o ad 1. Essendo il sistema in questione costituito da particelle identiche, è necessario imporre la condizione di antisimmetria della funzione d'onda totale sotto lo scambio  $1 \leftrightarrow 2$ . L'autofunzione  $\Psi(X)$  è evidentemente simmetrica sotto tale scambio. Le autofunzioni dello spin  $\chi$  sono simmetriche per  $s = 1$ , antisimmetriche per  $s = 0$ . Ciò impone che, nel caso  $s = 1$ , le autofunzioni del sistema ridotto  $\psi(x)$  siano antisimmetriche sotto lo scambio  $1 \leftrightarrow 2$ , che implica  $x \leftrightarrow -x$ . Quindi esse devono essere le autofunzioni dispari di

$$H_r(s = 1) = \frac{p^2}{m} + \frac{1}{4} A \hbar^2 x^2,$$

cioè le autofunzioni con numero quantico  $n = 1, 3, \dots$ , di un oscillatore armonico unidimensionale di massa  $m/2$  e pulsazione  $\omega = \hbar\sqrt{A/m}$ . Nel caso  $s = 0$ , le autofunzioni del sistema ridotto  $\psi(x)$  devono essere le autofunzioni pari di

$$H_r(s = 0) = \frac{p^2}{m} - \frac{3}{4}A\hbar^2 x^2 .$$

Questa Hamiltoniana non è definita positiva e non ammette autofunzioni normalizzabili. Essa descrive un sistema in cui lo stato energeticamente più favorito è quello in cui le particelle siano infinitamente distanti tra di loro.

## I prova di recupero, 9 luglio 2008

1. (a) Per il teorema della proiezione (Sakurai, (3.10.40)) abbiamo

$$\langle (S_{1,z} - S_{2,z}) \rangle = \frac{\langle \vec{J} \cdot (\vec{S}_1 - \vec{S}_2) \rangle \langle J_z \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} = \frac{\langle (\vec{S}_1 + \vec{S}_2) \cdot (\vec{S}_1 - \vec{S}_2) \rangle \langle J_z \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} = \frac{\langle (\vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2) \rangle \langle J_z \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} .$$

Gli elementi di matrice di  $(S_{1,z} - S_{2,z})$  tra stati con diverso valore di  $m$  sono evidentemente nulli.

(b.i) L'Hamiltoniana imperturbata

$$H_0 \equiv A \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{A}{2} (\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2) ,$$

dove  $\vec{S}$  rappresenta lo spin totale  $\vec{S}_1 + \vec{S}_2$ , ha i seguenti autoket:

$$\begin{array}{ll} \text{singoletto} & E_s^{(0)} = -\frac{3A}{4}\hbar^2 \quad |S=0, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle) \\ \text{tripetto} & E_t^{(0)} = +\frac{A}{4}\hbar^2 \quad \begin{cases} |S=1, M=1\rangle = |+\rangle|+\rangle \\ |S=1, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle) \\ |S=1, M=-1\rangle = |-\rangle|-\rangle \end{cases} \end{array}$$

Consideriamo ora l'effetto della perturbazione  $V \equiv B(S_{1,z} - S_{2,z})$ .

Lo spostamento energetico del singoletto al I ordine in teoria perturbativa è dato da

$$\begin{aligned} \langle 0, 0 | V | 0, 0 \rangle &= \frac{B}{2} \left( \langle + | \langle - | - \langle - | \langle + | \right) (S_{1,z} - S_{2,z}) \left( | + \rangle | - \rangle - | - \rangle | + \rangle \right) \\ &= \frac{B}{4} \hbar \left( \langle + | \langle - | - \langle - | \langle + | \right) \left( | + \rangle | - \rangle + | - \rangle | + \rangle + | + \rangle | - \rangle + | - \rangle | + \rangle \right) \\ &= 0 , \end{aligned}$$

dove si è preferito non usare il teorema della proiezione (vedere (a)) per evitare la difficoltà (peraltro aggirabile) dell'annullamento del denominatore  $j(j+1)$  per  $j = S = 0$ .

Per trovare gli spostamenti energetici al I ordine degli stati del tripletto, occorre costruire la matrice  $3 \times 3$  della perturbazione  $V$  sull'autospazio ad essi corrispondente. I termini da calcolare sono del tipo

$$\langle 1, M | V | 1, M' \rangle = B \langle 1, M | (S_{1,z} - S_{2,z}) | 1, M' \rangle ,$$

che risultano essere tutti nulli in virtù del teorema della proiezione (vedere punto (a)). Infatti, i termini fuori diagonale ( $M \neq M'$ ) sono zero perché è nullo l'elemento di matrice di  $\langle 1, M | S_z | 1, M' \rangle$ , i termini diagonali sono nulli perché  $S_1 = S_2$ .

Tirando le somme, al I ordine perturbativo non c'è spostamento dei livelli energetici imperturbati.

(b.ii) Per effettuare il calcolo esatto, dobbiamo scrivere la rappresentazione matriciale dell'Hamiltoniana completa  $H$  rispetto ad una base conveniente. La scelta migliore è la base formata



dagli autostati di  $H_0$ . La matrice cercata è data pertanto da

$$\begin{pmatrix} \langle 0,0|H|0,0\rangle & \langle 0,0|H|1,0\rangle & \langle 0,0|H|1,1\rangle & \langle 0,0|H|1,-1\rangle \\ \langle 1,0|H|0,0\rangle & \langle 1,0|H|1,0\rangle & \langle 1,0|H|1,1\rangle & \langle 1,0|H|1,-1\rangle \\ \langle 1,1|H|0,0\rangle & \langle 1,1|H|1,0\rangle & \langle 1,1|H|1,1\rangle & \langle 1,1|H|1,-1\rangle \\ \langle 1,-1|H|0,0\rangle & \langle 1,-1|H|1,0\rangle & \langle 1,-1|H|1,1\rangle & \langle 1,-1|H|1,-1\rangle \end{pmatrix},$$

avendo ordinato gli autovalori nella sequenza  $|0,0\rangle, |1,0\rangle, |1,1\rangle, |1,-1\rangle$ . Poiché  $H = H_0 + V$ , con  $H_0$  diagonale rispetto alla base scelta, essa può essere riscritta come somma della matrice diagonale

$$\frac{A}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con la matrice rappresentativa di  $V = B(S_{1,z} - S_{2,z})$ , data da

$$\begin{pmatrix} \langle 0,0|V|0,0\rangle & \langle 0,0|V|1,0\rangle & \langle 0,0|V|1,1\rangle & \langle 0,0|V|1,-1\rangle \\ \langle 1,0|V|0,0\rangle & \langle 1,0|V|1,0\rangle & \langle 1,0|V|1,1\rangle & \langle 1,0|V|1,-1\rangle \\ \langle 1,1|V|0,0\rangle & \langle 1,1|V|1,0\rangle & \langle 1,1|V|1,1\rangle & \langle 1,1|V|1,-1\rangle \\ \langle 1,-1|V|0,0\rangle & \langle 1,-1|V|1,0\rangle & \langle 1,-1|V|1,1\rangle & \langle 1,-1|V|1,-1\rangle \end{pmatrix}.$$

Di questa matrice sappiamo già che sono nulli tutti i termini del tipo  $\langle 1, M|V|1, M'\rangle$ , oltre a  $\langle 0,0|V|0,0\rangle$ . Restano da calcolare i termini  $\langle 0,0|V|1,0\rangle, \langle 0,0|V|1,1\rangle, \langle 0,0|V|1,-1\rangle$  ed i loro complessi coniugati. Poiché

$$\begin{aligned} (S_{1,z} - S_{2,z})|1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{1,z} - S_{2,z})\left(|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle\right) \\ &= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\left(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle + |+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle\right) \\ &= \hbar|0,0\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (S_{1,z} - S_{2,z})|1,1\rangle &= (S_{1,z} - S_{2,z})|+\rangle|+\rangle = 0, \\ (S_{1,z} - S_{2,z})|1,-1\rangle &= (S_{1,z} - S_{2,z})|-\rangle|-\rangle = 0, \end{aligned}$$

la matrice rappresentativa di  $H$  diventa

$$\frac{A}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + B\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

di cui è facile trovare autovalori ed autovettori. Osserviamo che gli autoket di  $H_0$   $|1, 1\rangle$  e  $|1, -1\rangle$  sono anche autoket di  $H$ , con i medesimi autovalori; gli altri due autoket sono combinazioni lineari di  $|0, 0\rangle$  e  $|1, 0\rangle$  e i loro autovalori differiscono da quelli imperturbati per termini  $\mathcal{O}(B^2)$ , compatibilmente con il risultato ottenuto in teoria perturbativa al I ordine.

2. (i.) Lo stato fondamentale, il I stato eccitato e il II stato eccitato, con le corrispondenti energie, sono dati da

$$\begin{aligned} \Psi_{fond}(x_1, x_2) &= \psi_1(x_1)\psi_1(x_2), & E_{fond} &= 2E_1, \\ \Psi_I(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) + \psi_1(x_2)\psi_2(x_1)\right), & E_I &= E_1 + E_2 = 5E_1, \\ \Psi_{II}(x_1, x_2) &= \psi_2(x_1)\psi_2(x_2), & E_{II} &= 2E_2 = 8E_1. \end{aligned}$$

Tutti e tre gli stati sono non-degeneri.

- (ii.) Secondo la teoria perturbativa al I ordine, caso non-degenere, gli spostamenti energetici sotto la perturbazione  $V = -aV_0\delta(x_1 - x_2)$  sono dati da

$$\begin{aligned} \Delta_{fond}^{(1)} &= \int_0^a dx_1 \int_0^a dx_2 \Psi_{fond}^*(x_1, x_2) V(x_1, x_2) \Psi_{fond}(x_1, x_2) \\ &= -aV_0 \int_0^a dx |\Psi_{fond}(x, x)|^2 = -aV_0 \int_0^a dx \frac{4}{a^2} \sin^4\left(\pi\frac{x}{a}\right) = -\frac{3V_0}{2}, \\ \Delta_I^{(1)} &= \int_0^a dx_1 \int_0^a dx_2 \Psi_I^*(x_1, x_2) V(x_1, x_2) \Psi_I(x_1, x_2) \\ &= -aV_0 \int_0^a dx |\Psi_I(x, x)|^2 = -aV_0 \int_0^a dx \frac{4}{a^2} \sin^2\left(\pi\frac{x}{a}\right) \sin^2\left(2\pi\frac{x}{a}\right) = -V_0, \\ \Delta_{II}^{(1)} &= \int_0^a dx_1 \int_0^a dx_2 \Psi_{II}^*(x_1, x_2) V(x_1, x_2) \Psi_{II}(x_1, x_2) \\ &= -aV_0 \int_0^a dx |\Psi_{II}(x, x)|^2 = -aV_0 \int_0^a dx \frac{4}{a^2} \sin^4\left(2\pi\frac{x}{a}\right) = -\frac{3V_0}{2}. \end{aligned}$$

## II prova di recupero, 17 settembre 2008

1. (a) La funzione d'onda di uno stato con  $l = 0$  non dipende dalle coordinate angolari, essendo proporzionale alla funzione armonica sferica  $Y_0^0$  che è costante. Pertanto, il valor medio del primo termine dell'Hamiltoniana  $H'$  su uno stato con  $l = 0$  è proporzionale a

$$\int [3(\vec{S}_p \cdot \hat{r})(\vec{S}_e \cdot \hat{r}) - \vec{S}_p \cdot \vec{S}_e] d\Omega, \quad (9)$$

dove  $d\Omega$  è l'elemento di angolo solido. Se dimostriamo che

$$\int (\vec{S}_p \cdot \hat{r})(\vec{S}_e \cdot \hat{r}) d\Omega = \frac{4\pi}{3} \vec{S}_p \cdot \vec{S}_e, \quad (10)$$

allora l'integrale in (9) risulterà essere nullo, essendo evidentemente

$$\int \vec{S}_p \cdot \vec{S}_e d\Omega = 4\pi \vec{S}_p \cdot \vec{S}_e.$$

Per dimostrare (10), osserviamo innanzitutto che  $\vec{S}_e$  e  $\vec{S}_p$  sono due vettori fissati e che conviene orientare l'asse  $z$  del sistema di riferimento cartesiano lungo la direzione di uno di questi vettori, diciamo  $\vec{S}_e$ , e l'asse  $x$  sul piano che contiene entrambi i vettori  $\vec{S}_e$  ed  $\vec{S}_p$ . In questo modo, le componenti cartesiane di  $\vec{S}_e$ ,  $\vec{S}_p$  ed  $\hat{r}$  saranno le seguenti:

$$\begin{aligned} \vec{S}_e &= (0, 0, |\vec{S}_e|) = |\vec{S}_e|(0, 0, 1), \\ \vec{S}_p &= (|\vec{S}_p| \sin \alpha, 0, |\vec{S}_p| \cos \alpha) = |\vec{S}_p|(\sin \alpha, 0, \cos \alpha), \\ \hat{r} &= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \end{aligned}$$

dove  $\alpha$  è l'angolo compreso tra  $\vec{S}_e$  ed  $\vec{S}_p$ , mentre  $\theta$  e  $\phi$  sono le consuete coordinate angolari. L'integrale in (10) diventa

$$\begin{aligned} &|\vec{S}_e||\vec{S}_p| \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (\sin \alpha \sin \theta \cos \phi + \cos \alpha \cos \theta) \cos \theta \\ &= |\vec{S}_e||\vec{S}_p| \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \cos \alpha \cos^2 \theta \\ &= 2\pi |\vec{S}_e||\vec{S}_p| \cos \alpha \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{3} |\vec{S}_e||\vec{S}_p| \cos \alpha = \frac{4\pi}{3} \vec{S}_e \cdot \vec{S}_p. \end{aligned}$$

- (b) L'effetto della perturbazione  $H'$  sul livello fondamentale dell'atomo di idrogeno è dovuto, per quanto trovato al punto precedente, solo al secondo termine di  $H'$ . È conveniente riscrivere questo termine nella forma

$$H'' \equiv \frac{\mu_0 g e^2}{3m_p m_e} \frac{\vec{S}^2 - \vec{S}_p^2 - \vec{S}_e^2}{2} \delta^{(3)}(\vec{r})$$

dove  $\vec{S} = \vec{S}_e + \vec{S}_p$ , ed usare come base degli stati di spin del sistema elettrone-protone quella formata dagli autostati di  $\{\vec{S}^2, S_z, \vec{S}_e^2, \vec{S}_p^2\}$ . Il livello fondamentale dell'atomo di idrogeno, tenuto conto degli spin di elettrone e protone, è 4 volte degenero e, con la scelta fatta per la base degli stati di spin, gli autostati corrispondenti a questo livello sono dati da

$$\psi_{100}(\vec{r})|S = 1, S_z = m\rangle, \quad m = 0, \pm 1 \quad \psi_{100}(\vec{r})|S = 0, S_z = 0\rangle.$$

Il valor medio di  $H''$  sugli stati del livello fondamentale è dato allora da

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_0 g e^2}{6 m_p m_e} \int |\psi_{100}(\vec{r})|^2 \delta^{(3)}(\vec{r}) \langle S, S_z | (\vec{S}^2 - \vec{S}_p^2 - \vec{S}_e^2) | S, S_z \rangle \\ &= \frac{\mu_0 g e^2}{6 m_p m_e} \frac{1}{\pi a^3} \langle S, S_z | (\vec{S}^2 - \vec{S}_p^2 - \vec{S}_e^2) | S, S_z \rangle \\ &= \frac{\mu_0 g e^2}{6 m_p m_e} \frac{1}{\pi a^3} \times \hbar^2 \begin{cases} \frac{1}{2} & S = 1 \\ -\frac{3}{2} & S = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Per effetto della perturbazione il livello fondamentale si separa in due livelli, che distano in energia

$$\Delta \equiv \frac{\mu_0 g e^2}{3 m_p m_e} \frac{\hbar^2}{\pi a^3} = \frac{4}{3} g (m_e c^2) \frac{m_e}{m_p} \left( \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 \hbar c} \right)^4 \simeq 5.88 \times 10^{-6} \text{ eV} .$$

I fotoni emessi o assorbiti in seguito a transizioni tra questi due livelli hanno lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta} \simeq 21.1 \text{ cm} .$$

2. Osserviamo innanzitutto che la condizione sotto la quale  $V$  può essere trattato come una perturbazione è che il valore assoluto di un suo elemento di matrice tipico tra autostati imperturbati del sistema sia molto più piccolo della separazione tipica tra i livelli energetici imperturbati. Nel caso in questione, un elemento di matrice di  $V$  tra stati imperturbati è di ordine  $V_0$ , essendo di ordine  $a^2$  gli elementi di matrice tipici di  $\hat{x}^2$  e di  $\hat{y}^2$ ; la separazione tra livelli imperturbati non eccede il valore dell'energia di ionizzazione, circa uguale a 13.6 eV, quindi deve essere  $|V_0| \ll 13.6 \text{ eV}$ .

Ricordando la struttura delle armoniche sferiche con  $l = 2$  (vedere Problema 2 del 14 luglio 2004), si conclude subito che  $V$  può essere scritto come

$$V = T_2^{(2)} + T_{-2}^{(2)} ,$$

dove  $T_{\pm 2}^{(2)}$  sono tensori sferici di rango 2. Siamo ora in grado di affrontare agevolmente il calcolo dello spostamento dei livelli energetici  $n = 1$  ed  $n = 2$  dell'atomo di idrogeno.

Il livello  $n = 1$  è non-degenere (lo spin può essere trascurato dato il tipo di perturbazione) e l'autostato corrispondente, nella notazione standard  $|n, l, m\rangle$ , è dato da  $|1, 0, 0\rangle$ . Su questo stato il valor medio di  $V$  è evidentemente nullo, in virtù della regola di  $m$ -selezione (Sakurai, (3.10.28)).

Passiamo ora al livello  $n = 2$ : esso è 4 volte degenere e gli autostati imperturbati corrispondenti sono dati da  $|2, 1, 1\rangle$ ,  $|2, 1, 0\rangle$ ,  $|2, 1, -1\rangle$  e  $|2, 0, 0\rangle$ . La matrice rappresentativa della perturbazione sugli stati imperturbati del livello  $n = 2$ , presi nell'ordine in cui sono stati elencati, risulta essere molto semplice, in virtù della regola di  $m$ -selezione:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove  $A = \langle 2, 1, 1 | V | 2, 1, -1 \rangle$ , che è un numero reale. Quindi, di fatto, c'è solo un integrale da calcolare:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{V_0}{a^2} \int \psi_{211}^*(\vec{r})(\hat{x}^2 - \hat{y}^2)\psi_{21-1}(\vec{r}) d\vec{r} \\
 &= \frac{V_0}{a^2} \int_0^\infty [R_{21}(r)]^2 r^4 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi [Y_1^1(\theta, \phi)]^* Y_{-1}^1(\theta, \phi) \sin^2 \theta (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \\
 &= \frac{V_0}{a^2} \int_0^\infty \frac{1}{24a^3} \frac{r^2}{a^2} e^{-r/a} r^4 dr \int_0^\pi \left(-\frac{3}{8\pi}\right) \sin^5 \theta d\theta \int_0^{2\pi} e^{-2i\phi} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) d\phi \\
 &= \dots = -12 V_0 .
 \end{aligned}$$

**Prova finale, 26 marzo 2009**

1. Al prim'ordine in teoria perturbativa, lo spostamento energetico del livello  $n$ -esimo è dato da

$$\begin{aligned}\Delta_n^{(1)} &= V \int_{a/2-L/2}^{a/2+L/2} |\psi_n^{(0)}(x)|^2 dx = V \frac{2}{a} \int_{a/2-L/2}^{a/2+L/2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \\ &= \frac{V}{a} \int_{a/2-L/2}^{a/2+L/2} \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)\right] dx \\ &= V \left\{ \frac{L}{a} - \frac{1}{2n\pi} \left[ \sin\left(n\pi\left(1 + \frac{L}{a}\right)\right) - \sin\left(n\pi\left(1 - \frac{L}{a}\right)\right) \right] \right\} \\ &= V \left[ \frac{L}{a} - \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) \sin\left(n\pi\frac{L}{a}\right) \right].\end{aligned}$$

Osseviamo che nel limite  $L \rightarrow 0$ , si ha  $\Delta_n^{(1)} \rightarrow 0$ , mentre nel limite  $L \rightarrow a$ , si ha  $\Delta_n^{(1)} \rightarrow V$ , come deve essere. Quando  $L \rightarrow 0$  e  $V \rightarrow \infty$ , con  $LV \rightarrow A = \text{costante}$ , si ha

$$\Delta_n^{(1)} \rightarrow \frac{A}{a} [1 - \cos(n\pi)] = \frac{2A}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

in accordo con il risultato ottenuto applicando una perturbazione della forma  $A\delta(x - a/2)$ , infatti

$$\begin{aligned}\Delta_n^{(1)} &= \int_0^a A\delta\left(x - \frac{a}{2}\right) |\psi_n^{(0)}(x)|^2 dx = A \frac{2}{a} \int_0^a \delta\left(x - \frac{a}{2}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \\ &= \frac{2A}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{A}{a} [1 - \cos(n\pi)].\end{aligned}$$

2. Gli autostati del livello  $n=3$  dell'atomo di idrogeno non-relativistico possono avere numero quantico magnetico  $l=0, 1, 2$ , pertanto, se li classifichiamo come autostati simultanei degli operatori  $\vec{J}^2, J_z, \vec{L}^2, \vec{S}^2$ , con  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ , abbiamo

$$\begin{aligned}\left| n=3, j=\frac{1}{2}, m; l=0; s=\frac{1}{2} \right\rangle & \quad \text{con } m = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \\ \left| n=3, j=\frac{1}{2}, m; l=1; s=\frac{1}{2} \right\rangle & \quad \text{con } m = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \\ \left| n=3, j=\frac{3}{2}, m; l=1; s=\frac{1}{2} \right\rangle & \quad \text{con } m = -\frac{3}{2}, \dots, +\frac{3}{2} \\ \left| n=3, j=\frac{3}{2}, m; l=2; s=\frac{1}{2} \right\rangle & \quad \text{con } m = -\frac{3}{2}, \dots, +\frac{3}{2} \\ \left| n=3, j=\frac{5}{2}, m; l=2; s=\frac{1}{2} \right\rangle & \quad \text{con } m = -\frac{5}{2}, \dots, +\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Per il teorema della proiezione (Sakurai, (3.10.40)) abbiamo

$$\begin{aligned}\langle n=3, j, m; l; s | L_z | n=3, j, m; l; s \rangle &= \frac{\langle \vec{J} \cdot \vec{L} \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \langle J_z \rangle = \frac{1}{2} \frac{\langle \vec{J}^2 + \vec{L}^2 - \vec{S}^2 \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \langle J_z \rangle \\ &= \frac{\hbar m}{2} \frac{j(j+1) + l(l+1) - 3/4}{j(j+1)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle n = 3, j, m; l; s | S_z | n = 3, j, m; l; s \rangle &= \frac{\langle \vec{J} \cdot \vec{S} \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \langle J_z \rangle = \frac{1}{2} \frac{\langle \vec{J}^2 + \vec{S}^2 - \vec{L}^2 \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \langle J_z \rangle \\
&= \frac{\hbar m j(j+1) + 3/4 - l(l+1)}{2 j(j+1)}.
\end{aligned}$$

3. Poiché il sistema in questione è costituito da due particelle identiche di spin  $1/2$ , la funzione d'onda totale deve essere antisimmetrica. Ignorando lo spin, le autofunzioni del sistema sono date da tutte le funzioni del tipo

$$\Psi(x_1, x_2) = \psi_{n_1}^{(0)}(x_1) \psi_{n_2}^{(0)}(x_2),$$

con  $n_1, n_2 = 1, 2, \dots$ , la cui energia corrispondente è  $E_{n_1}^{(0)} + E_{n_2}^{(0)}$  (per la notazione utilizzata vedere il testo del Problema 1 di questo stesso appello).

Il livello fondamentale è quello con  $n_1 = n_2 = 1$ , la cui funzione d'onda per la parte spaziale è

$$\psi_1^{(0)}(x_1) \psi_1^{(0)}(x_2),$$

che è necessariamente simmetrica sotto lo scambio  $1 \leftrightarrow 2$ . Ciò implica che la funzione d'onda di spin deve essere antisimmetrica e, quindi, non può che essere la funzione d'onda di singoletto di spin totale,  $|s = 0, s_z = 0\rangle$ . Il livello fondamentale è, evidentemente, non-degenere.

Il primo livello eccitato è quello in cui uno tra i numeri quantici  $n_1$  ed  $n_2$  vale 1 mentre l'altro vale 2. La più generale funzione d'onda totale antisimmetrica sotto lo scambio  $1 \leftrightarrow 2$  può essere sempre scritta come combinazione delle seguenti quattro

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi_1^{(0)}(x_1) \psi_2^{(0)}(x_2) + \psi_2^{(0)}(x_1) \psi_1^{(0)}(x_2) \right) |s = 0, s_z = 0\rangle, \\
&\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi_1^{(0)}(x_1) \psi_2^{(0)}(x_2) - \psi_2^{(0)}(x_1) \psi_1^{(0)}(x_2) \right) |s = 1, s_z = -1, 0, +1\rangle,
\end{aligned}$$

dove con  $|s = 1, s_z = -1, 0, +1\rangle$  sono stati indicati gli stati del tripletto di spin totale. Il I livello eccitato è, quindi, quattro volte degenere.

L'effetto al I ordine della perturbazione sul livello fondamentale è quello di produrre uno spostamento pari a

$$\Delta_{fond}^{(1)} = \int_0^a dx_1 \int_0^a dx_2 V(x_1 - x_2) |\psi_1^{(0)}(x_1)|^2 |\psi_1^{(0)}(x_2)|^2.$$

Poiché la perturbazione non dipende dallo spin e poiché autostati con spin diverso del I livello eccitato sono ortogonali tra di loro, l'effetto al I ordine della perturbazione su questo livello è di produrre uno spostamento pari a

$$\Delta_{I, simm}^{(1)} = \int_0^a dx_1 \int_0^a dx_2 V(x_1 - x_2) \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi_1^{(0)}(x_1) \psi_2^{(0)}(x_2) + \psi_2^{(0)}(x_1) \psi_1^{(0)}(x_2) \right) \right|^2$$

della energia dello stato con funzione d'onda spaziale simmetrica, e uno spostamento pari a

$$\Delta_{I, antisimm}^{(1)} = \int_0^a dx_1 \int_0^a dx_2 V(x_1 - x_2) \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi_1^{(0)}(x_1) \psi_2^{(0)}(x_2) - \psi_2^{(0)}(x_1) \psi_1^{(0)}(x_2) \right) \right|^2$$

della energia dei tre stati con funzione d'onda spaziale antisimmetrica.

## I prova di recupero, 15 luglio 2009

1. Il livello fondamentale dell'Hamiltoniana imperturbata

$$H_0 = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} - \frac{2}{r_1} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} - \frac{2}{r_2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

è dato da

$$E_{fond}^{(0)} = 2 \cdot \left( -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \right) = -8 \text{ Ry} \simeq -108.8 \text{ eV}$$

e la corrispondente autofunzione ha parte spaziale data da

$$\Psi_{fond}^{(0)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_{100}(\vec{r}_1)\psi_{100}(\vec{r}_2) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{a} \right)^3 e^{-2/a(r_1+r_2)}$$

(la parte di spin della funzione d'onda è irrilevante in questo problema).

Il livello fondamentale dell'Hamiltoniana perturbata, al prim'ordine in teoria perturbativa, è dato da

$$E_{fond}^{(1)} = E_{fond}^{(0)} + \Delta_{fond}^{(1)},$$

con

$$\Delta_{fond}^{(1)} = \left\langle \Psi_{fond} \left| \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right| \Psi_{fond} \right\rangle.$$

Ora,

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi_{fond} \left| \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right| \Psi_{fond} \right\rangle &= \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 |\Psi_{fond}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2 \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \\ &= \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 |\psi_{100}(\vec{r}_1)\psi_{100}(\vec{r}_2)|^2 \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \end{aligned}$$

Effettuiamo prima l'integrazione in  $\vec{r}_2$ , in cui il vettore  $\vec{r}_1$  va tenuto fisso, e, per convenienza, orientiamo l'asse  $z_2$  nella direzione di  $\vec{r}_1$ . Abbiamo allora che

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{\vec{r}_1^2 + \vec{r}_2^2 - 2\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta_2}$$

e

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi_{fond} \left| \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right| \Psi_{fond} \right\rangle &= \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2}{a} \right)^{3/2} \right]^4 \int d\vec{r}_1 \int_0^\infty r_2^2 dr_2 \int_0^{2\pi} d\phi_2 \int_0^{2\pi} \sin \theta_2 d\theta_2 e^{-\frac{4}{a}(r_1+r_2)} \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta_2}} \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{2}{a} \right)^6 \int d\vec{r}_1 \int_0^\infty r_2^2 dr_2 \int_{-1}^1 dx \frac{e^{-\frac{4}{a}(r_1+r_2)}}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 x}} \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{2}{a} \right)^6 \int d\vec{r}_1 \int_0^\infty r_2^2 dr_2 e^{-\frac{4}{a}(r_1+r_2)} \left[ -\frac{1}{r_1 r_2} \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 x} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{2}{a} \right)^6 \int d\vec{r}_1 \frac{e^{-\frac{4}{a}r_1}}{r_1} \int_0^\infty r_2 dr_2 e^{-\frac{4}{a}r_2} (r_1 + r_2 - |r_1 - r_2|) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{2}{a} \right)^6 \int d\vec{r}_1 \frac{e^{-\frac{4}{a}r_1}}{r_1} \left[ \int_0^{r_1} dr_2 2r_2^2 e^{-\frac{4}{a}r_2} + \int_{r_1}^\infty dr_2 2r_1 r_2 e^{-\frac{4}{a}r_2} \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{2}{a}\right)^6 \int d\vec{r}_1 \frac{e^{-\frac{4}{a}r_1}}{r_1} \frac{a^2}{16} \left(a - e^{-\frac{4}{a}r_1}(a + 2r_1)\right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{2}{a}\right)^6 \frac{a^2}{16} 4\pi \int_0^\infty dr_1 r_1 \left(ae^{-\frac{4}{a}r_1} - e^{-\frac{8}{a}r_1}(a + 2r_1)\right) = \frac{5}{4a}.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$E_{fond}^{(1)} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{a} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{5}{4a} = -8 \text{ Ry} + \frac{5}{2} \text{ Ry} \simeq -74.8 \text{ eV}.$$

Il confronto con il dato sperimentale non è disprezzabile, soprattutto in considerazione del fatto che la correzione perturbativa  $\Delta_{fond}^{(1)}$  non è molto piccola rispetto ad  $E_{fond}^{(0)}$ .

2. La funzione d'onda dello stato fondamentale avrà parte spaziale necessariamente simmetrica sotto lo scambio delle due particelle di carica negativa, di conseguenza anche la funzione d'onda di spin deve essere simmetrica, essendo il sistema in questione un sistema di due bosoni. Ora, nella composizione di due spin 1 possiamo avere spin totale pari a 0, 1 e 2. Gli stati con spin totale 0 e 2 sono simmetrici sotto scambio delle due particelle, mentre quelli con spin 1 sono antisimmetrici. Di conseguenza, lo stato fondamentale del sistema può avere solo spin totale pari a 0 e a 2. Il numero degli stati a spin totale 0 è pari a 1, mentre quello degli stati a spin totale 2 è pari a 5, pertanto la degenerazione dello stato fondamentale è pari a 6.
3. Osserviamo innanzitutto che con le componenti del vettore  $\vec{r}$  è possibile costruire il tensore sferico di rango 2 le cui componenti sono date da

$$\begin{aligned}
T_{\pm 2}^{(2)} &= \frac{1}{2}(x \pm iy)^2, \\
T_{\pm 1}^{(2)} &= \mp(x \pm iy)z, \\
T_0^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(3z^2 - r^2),
\end{aligned}$$

(vedere Problema 2 del 13 settembre 2006). Pertanto

$$\begin{aligned}
Q &\equiv e\langle 2, 1, 1 | (3z^2 - r^2) | 2, 1, 1 \rangle = e\sqrt{6} \langle 2, 1, 1 | T_0^{(2)} | 2, 1, 1 \rangle = e\sqrt{6} \left( \langle 2, 0; 1, 1 | 1, 1 \rangle \right) \cdot (\text{EMR}) \\
&= e\sqrt{6} \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (\text{EMR}) = e\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot (\text{EMR}),
\end{aligned}$$

da cui segue che

$$(\text{EMR}) = \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{Q}{e}.$$

Ora, dal momento che

$$x^2 - y^2 = T_2^2 + T_{-2}^2,$$

abbiamo che

$$e\langle 2, l', m' | (x^2 - y^2) | 2, l, m \rangle = e\langle 2, l', m' | (T_2^2 + T_{-2}^2) | 2, l, m \rangle.$$

In virtù del teorema della proiezione (Sakurai, (3.10.40)) e del fatto che, essendo  $n=2$ ,  $l$  può prendere solo i valori 0 e 1, si vede facilmente che gli unici due elementi di matrice non nulli sono

$$\begin{aligned}
e\langle 2, 1, 1 | (T_2^2 + T_{-2}^2) | 2, 1, -1 \rangle &= e\langle 2, 1, 1 | T_2^2 | 2, 1, -1 \rangle = e \left( \langle 2, 2; 1, -1 | 1, 1 \rangle \right) \cdot (\text{EMR}) \\
&= e\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot (\text{EMR}) = e\sqrt{\frac{3}{5}} \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{Q}{e} = Q
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} e\langle 2, 1, -1 | (T_{-2}^2 + T_2^2) | 2, 1, 1 \rangle &= e\langle 2, 1, -1 | T_2^{-2} | 2, 1, 1 \rangle = e\left( \langle 2, -2; 1, 1 | 1, -1 \rangle \right) \cdot (\text{EMR}) \\ &= e\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot (\text{EMR}) = e\sqrt{\frac{3}{5}} \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{Q}{e} = Q. \end{aligned}$$

## II prova di recupero, 17 settembre 2009

1. Vedere Problema 2 del 9 luglio 2008.
2. (a) L'Hamiltoniana  $H_0$  è separabile nella somma di due Hamiltoniane di oscillatore armonico unidimensionale,

$$H_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \left[ \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \right] + \left[ \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}y^2 \right] \equiv H_{0,1} + H_{0,2} .$$

Dell'Hamiltoniana  $H_{0,i}$  conosciamo gli autostati  $|n_i\rangle$  ed i rispettivi autovalori,  $E_{n_i} = \hbar\omega(n_i + 1/2)$ , con  $n_i = 0, 1, \dots$ . Le autofunzioni di  $H_{0,1}$  sono ovviamente le  $\psi_{n_1}(x) = \langle x|n_1\rangle$ , quelle di  $H_{0,2}$  le  $\psi_{n_2}(y) = \langle y|n_2\rangle$ .

Gli autostati di  $H_0$  sono della forma  $|n_1, n_2\rangle \equiv |n_1\rangle|n_2\rangle$  e gli autovalori corrispondenti sono  $E_{n_1, n_2} = E_{n_1} + E_{n_2} = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1)$ . Il livello fondamentale è quello corrispondente a  $n_1 = n_2 = 0$  ed è pari ad  $E_{0,0} = \hbar\omega$ . Esso è evidentemente non-degenere. Il I livello eccitato è realizzato per  $n_1 = 1, n_2 = 0$  ed  $n_1 = 0, n_2 = 1$ . Esso è pari a  $E_{1,0} = E_{0,1} = 2\hbar\omega$  ed è doppiamente degenere.

(b) L'interazione con il campo elettrico uniforme comporta l'aggiunta all'Hamiltoniana  $H_0$  del termine  $V = -eEx$ , dove  $e$  è la carica dell'elettrone. Se possiamo trattare questo termine come una perturbazione, abbiamo allora che per il livello fondamentale, che è non degenere, lo spostamento al I ordine perturbativo è dato da

$$\begin{aligned} \Delta_{0,0}^{(1)} &= \langle 0, 0|V|0, 0\rangle = -eE\langle 0, 0|x|0, 0\rangle \\ &= -eE\langle 0|x|0\rangle_x\langle 0|0\rangle_y = 0 , \end{aligned}$$

poiché le autofunzioni dell'oscillatore armonico unidimensionale hanno parità definita.

Il I livello eccitato è doppiamente degenere, pertanto per calcolare lo spostamento al I ordine perturbativo dobbiamo prima scrivere la matrice rappresentativa di  $V$  sull'autospazio relativo al I livello eccitato:

$$\begin{pmatrix} \langle 1, 0|V|1, 0\rangle & \langle 1, 0|V|0, 1\rangle \\ \langle 0, 1|V|1, 0\rangle & \langle 0, 1|V|0, 1\rangle \end{pmatrix} .$$

Gli elementi di matrice  $\langle 1, 0|V|1, 0\rangle$  e  $\langle 0, 1|V|0, 1\rangle$  sono nulli per lo stesso motivo per cui lo era  $\langle 0, 0|V|0, 0\rangle$ . L'elemento di matrice

$$\langle 1, 0|V|0, 1\rangle = \langle 0, 1|V|1, 0\rangle^* = -eE\langle 0, 1|x|1, 0\rangle = -eE\langle 0|x|1\rangle_x\langle 1|0\rangle_y = 0 ,$$

per l'ortogonalità tra i ket  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ .

Pertanto, al prim'ordine perturbativo l'effetto della perturbazione sul livello fondamentale e sul I livello eccitato è nullo.

(c) Gli autovalori dell'Hamiltoniana perturbata  $H = H_0 + V$  possono essere trovati in modo *esatto* osservando che

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - eEx \\ &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \left( x - \frac{eE}{m\omega^2} \right)^2 + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}y^2 - \frac{1}{2} \frac{e^2 E^2}{m\omega^2} \end{aligned}$$

che, detta  $X = x - eE/(m\omega^2)$ , è della forma dell'Hamiltoniana originaria  $H_0$ , a meno della costante additiva  $-e^2 E^2/(2m\omega^2)$ . Poiché  $X$  differisce da  $x$  per una costante,  $X$  e  $p_x$  continuano ad essere variabili coniugate e gli autovalori di  $H$  sono gli stessi di  $H_0$ , a meno della

costante  $-e^2 E^2 / (2m\omega^2)$ , cioè lo spostamento energetico *esatto* è dato, per ogni  $n$ , da un termine quadratico in  $E$ . È pertanto evidente che lo spostamento energetico in teoria delle perturbazioni al prim'ordine non poteva che risultare nullo.

3. Osserviamo innanzitutto che con le componenti del vettore  $\vec{r}$  è possibile costruire il tensore sferico di rango 2 le cui componenti sono date da

$$\begin{aligned} T_{\pm 2}^{(2)} &= \frac{1}{2}(x \pm iy)^2, \\ T_{\pm 1}^{(2)} &= \mp(x \pm iy)z, \\ T_0^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(3z^2 - r^2), \end{aligned}$$

(vedere Problema 2 del 13 settembre 2006). Pertanto

$$\begin{aligned} Q &\equiv e\langle 3, 2, 2 | (3z^2 - r^2) | 3, 2, 2 \rangle = e\sqrt{6}\langle 3, 2, 2 | T_0^{(2)} | 3, 2, 2 \rangle = e\sqrt{6}\left(\langle 2, 0; 2, 2 | 2, 2 \rangle\right) \cdot (\text{EMR}) \\ &= e\sqrt{6}\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot (\text{EMR}) = e\sqrt{\frac{12}{7}} \cdot (\text{EMR}), \end{aligned}$$

da cui segue che

$$(\text{EMR}) = \sqrt{\frac{7}{12}} \frac{Q}{e}.$$

Ora, dal momento che

$$xy = \frac{1}{2i}(T_2^2 - T_{-2}^2),$$

abbiamo che

$$e\langle 3, 2, m' | xy | 2, l, m \rangle = \frac{e}{2i}\langle 3, 2, m' | (T_2^2 - T_{-2}^2) | 3, 2, m \rangle.$$

In virtù del teorema della proiezione (Sakurai, (3.10.40)), gli unici elementi di matrice non nulli sono

$$\begin{aligned} \frac{e}{2i}\langle 3, 2, 0 | (T_2^2 - T_{-2}^2) | 3, 2, -2 \rangle &= \frac{e}{2i}\langle 3, 2, 0 | T_2^2 | 3, 2, -2 \rangle \\ &= \frac{e}{2i}\left(\langle 2, 2; 2, -2 | 2, 0 \rangle\right) \cdot (\text{EMR}) \\ &= \frac{e}{2i}\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot (\text{EMR}) = \frac{e}{2i}\sqrt{\frac{2}{7}}\sqrt{\frac{7}{12}}\frac{Q}{e} = \frac{Q}{2i\sqrt{6}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{e}{2i}\langle 3, 2, 1 | (T_2^2 - T_{-2}^2) | 3, 2, -1 \rangle &= \frac{e}{2i}\langle 3, 2, 1 | T_2^2 | 3, 2, -1 \rangle \\ &= \frac{e}{2i}\left(\langle 2, 2; 2, -1 | 2, 1 \rangle\right) \cdot (\text{EMR}) \\ &= \frac{e}{2i}\sqrt{\frac{3}{7}} \cdot (\text{EMR}) = \frac{e}{2i}\sqrt{\frac{3}{7}}\sqrt{\frac{7}{12}}\frac{Q}{e} = \frac{Q}{4i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{e}{2i}\langle 3, 2, 2 | (T_2^2 - T_{-2}^2) | 3, 2, 0 \rangle &= \frac{e}{2i}\langle 3, 2, 2 | T_2^2 | 3, 2, 0 \rangle \\ &= \frac{e}{2i}\left(\langle 2, 2; 2, 0 | 2, 2 \rangle\right) \cdot (\text{EMR}) \\ &= \frac{e}{2i}\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot (\text{EMR}) = \frac{e}{2i}\sqrt{\frac{2}{7}}\sqrt{\frac{7}{12}}\frac{Q}{e} = \frac{Q}{2i\sqrt{6}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{e}{2i} \langle 3, 2, -2 | (T_2^2 - T_{-2}^2) | 3, 2, 0 \rangle &= -\frac{e}{2i} \langle 3, 2, -2 | T_2^{-2} | 3, 2, 0 \rangle \\
&= -\frac{e}{2i} \left( \langle 2, -2; 2, 0 | 2, -2 \rangle \right) \cdot (\text{EMR}) \\
&= -\frac{e}{2i} \sqrt{\frac{2}{7}} \cdot (\text{EMR}) = -\frac{e}{2i} \sqrt{\frac{2}{7}} \sqrt{\frac{7}{12}} \frac{Q}{e} = -\frac{Q}{2i\sqrt{6}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{e}{2i} \langle 3, 2, -1 | (T_2^2 - T_{-2}^2) | 3, 2, 1 \rangle &= -\frac{e}{2i} \langle 3, 2, -1 | T_2^2 | 3, 2, 1 \rangle \\
&= -\frac{e}{2i} \left( \langle 2, -2; 2, 1 | 2, -1 \rangle \right) \cdot (\text{EMR}) \\
&= -\frac{e}{2i} \sqrt{\frac{3}{7}} \cdot (\text{EMR}) = -\frac{e}{2i} \sqrt{\frac{3}{7}} \sqrt{\frac{7}{12}} \frac{Q}{e} = -\frac{Q}{4i},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{e}{2i} \langle 3, 2, 0 | (T_2^2 - T_{-2}^2) | 3, 2, 2 \rangle &= -\frac{e}{2i} \langle 3, 2, 0 | T_{-2}^2 | 3, 2, 2 \rangle \\
&= -\frac{e}{2i} \left( \langle 2, -2; 2, 2 | 2, 0 \rangle \right) \cdot (\text{EMR}) \\
&= -\frac{e}{2i} \sqrt{\frac{2}{7}} \cdot (\text{EMR}) = -\frac{e}{2i} \sqrt{\frac{2}{7}} \sqrt{\frac{7}{12}} \frac{Q}{e} = -\frac{Q}{2i\sqrt{6}}.
\end{aligned}$$

**Prova finale, 30 marzo 2010**

1. (a) Il nucleo e l'elettrone dell'atomo 2 siano posti rispettivamente in  $x = 0$  e in  $x = x_2$ , mentre il nucleo e l'elettrone dell'atomo 1 siano posti rispettivamente in  $x = R$  e in  $x = R + x_1$ . L'espressione data per  $V$  è allora la somma dei potenziali coulombiani per le interazioni, rispettivamente, tra i due nuclei, tra nucleo 2 ed elettrone 1, tra nucleo 1 ed elettrone 2, tra i due elettroni.

(b) Ricordando che

$$\frac{1}{R+x} = \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{x}{R} + \frac{x^2}{R^2} \right) + O\left(\frac{x^3}{R^3}\right),$$

è facile verificare che  $V$  si semplifica come indicato nel testo.

(c) L'Hamiltoniana  $H_0$  è separabile nella somma di due Hamiltoniane di oscillatore armonico unidimensionale,

$$H_0 = \left[ \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x_1^2 \right] + \left[ \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x_2^2 \right] \equiv H_{0,1} + H_{0,2}.$$

Dell'Hamiltoniana  $H_{0,i}$  conosciamo gli autostati  $|n_i\rangle$  ed i rispettivi autovalori,  $E_{n_i}^{(0)} = \hbar\omega(n_i + 1/2)$ , con  $n_i = 0, 1, \dots$ . Gli autostati di  $H_0$  sono della forma  $|n_1, n_2\rangle \equiv |n_1\rangle|n_2\rangle$  e gli autovalori corrispondenti sono  $E_{n_1, n_2}^{(0)} = E_{n_1}^{(0)} + E_{n_2}^{(0)} = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1)$ . Il livello fondamentale è quello corrispondente a  $n_1 = n_2 = 0$  ed è pari ad  $E_{0,0}^{(0)} = \hbar\omega$ . Esso è evidentemente non-degenere. Lo spostamento al I ordine perturbativo è dato da

$$\Delta_{0,0}^{(1)} = \langle 0, 0 | V | 0, 0 \rangle \propto \langle 0 | x_1 | 0 \rangle \langle 0 | x_2 | 0 \rangle = 0,$$

per parità.

Il primo termine di spostamento energetico non nullo è pertanto quello di II ordine, dato da

$$\Delta_{0,0}^{(2)} = \sum_{(k_1, k_2) \neq (0,0)} \frac{|\langle k_1, k_2 | V | 0, 0 \rangle|^2}{E_{0,0}^{(0)} - E_{k_1, k_2}^{(0)}} = \frac{e^4}{(2\pi\epsilon_0)^2 R^6} \sum_{(k_1, k_2) \neq (0,0)} \frac{|\langle k_1 | x_1 | 0 \rangle|^2 |\langle k_2 | x_2 | 0 \rangle|^2}{E_{0,0}^{(0)} - E_{k_1, k_2}^{(0)}}.$$

Gli unici elementi di matrice non nulli tra quelli che appaiono al numeratore della precedente equazione sono quelli per  $k_1 = k_2 = 1$ , per i quali si ha

$$\langle 1 | x_1 | 0 \rangle = \langle 1 | x_2 | 0 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

(Sakurai, (2.3.25a)). Pertanto

$$\Delta_0^{(2)} = \frac{e^4}{(2\pi\epsilon_0)^2 R^6} \left( \frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \frac{1}{-2\hbar\omega}.$$

In definitiva, al II ordine in teoria delle perturbazioni, il livello fondamentale è dato da

$$E_{0,0} = E_{0,0}^{(0)} + \Delta_{0,0}^{(2)} = \hbar\omega - \frac{e^4}{(2\pi\epsilon_0)^2 R^6} \frac{\hbar}{8m^2\omega^3}. \quad (11)$$

(d) Consideriamo l'Hamiltoniana perturbata  $H \equiv H_0 + V$ ,

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (x_1^2 + x_2^2 + 2Ax_1x_2), \quad A = -\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 R^3} \frac{1}{m\omega^2}.$$

Definendo i seguenti nuovi operatori posizione ed impulso,

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, & P_1 &= \frac{p_1 + p_2}{\sqrt{2}}, \\ X_2 &= \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, & P_2 &= \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

che soddisfano relazioni di commutazione canoniche, troviamo facilmente che

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(1+A)X_1^2 + \frac{m\omega^2}{2}(1-A)X_2^2,$$

che è separabile nella somma di due Hamiltoniane di oscillatore armonico unidimensionale con pulsazioni  $\omega\sqrt{1+A}$  e  $\omega\sqrt{1-A}$ . Quindi gli autovalori *esatti* del sistema sono dati da

$$E_{n_1, n_2} = \hbar\omega\sqrt{1+A} \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega\sqrt{1-A} \left( n_2 + \frac{1}{2} \right).$$

Per il livello fondamentale abbiamo

$$E_{0,0} = \frac{\hbar\omega}{2} \left( \sqrt{1+A} + \sqrt{1-A} \right) = \frac{\hbar\omega}{2} \left( 2 - \frac{A^2}{4} + O(A^4) \right) = \hbar\omega \left( 1 - \frac{A^2}{8} + O(A^4) \right),$$

in perfettamente accordo con il calcolo perturbativo al II ordine.

2. (a) Osserviamo innanzitutto che il potenziale  $V$  può essere scritto come un tensore sferico di rango 3.

Il livello fondamentale ( $n = 1$ ) è non-degenere ed ha  $l = 0$ . Lo spostamento al I ordine di questo livello è nullo, poiché un tensore di rango 3 ha valor medio nullo su uno stato con  $l = 0$ .

Il I livello eccitato ( $n = 2$ ) è degenere e ad esso corrispondono stati con  $l = 0$  ed  $l = 1$ . Tutti gli elementi di matrice tra autostati di questo livello sono della forma

$$\langle l_1, m_1 | T_q^{(3)} | l_2, m_2 \rangle, \quad l_{1,2} = 0, 1,$$

pertanto sono tutti nulli, in virtù del teorema di Wigner-Eckart. Infatti, la composizione tra momento angolare 0 e momento angolare 3 dà solo stati di momento angolare totale 3 (e non contiene pertanto stati con momento angolare totale 1), mentre la composizione tra momento angolare 1 e momento angolare 3 dà stati di momento angolare totale 4, 3, 2 (e non contiene pertanto stati con momento angolare totale pari a 0).

(b) Se si introduce un sistema di assi cartesiani con origine al centro della cella cubica di spigolo pari ad  $2a$ , le posizioni degli ioni sono individuate dalle terne

$$a(n_1, n_2, n_3), \quad n_1, n_2, n_3 = \pm 1.$$

Detta  $(x, y, z)$  la posizione dell'elettrone dell'atomo di idrogeno, il potenziale coulombiano a cui esso è soggetto è dato da

$$V(x, y, z) = \sum_{n_1, n_2, n_3 = -1, +1} (-1)^{n_1+n_2+n_3} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(an_1 - x)^2 + (an_2 - y)^2 + (an_3 - z)^2}},$$

dove  $\pm q$  denota la carica dello ione e gli ioni sono stati disposti in modo che le cariche si alternino spostandosi da un vertice del cubo a quello adiacente. Ora si dovrebbe sviluppare  $V$  in serie di Taylor e trovare il primo termine non nullo dello sviluppo. Ciò può essere evitato se si osserva che  $V(x, y, z)$  è una funzione dispari rispetto a ciascuna delle sue variabili, pertanto il primo termine non nullo dello sviluppo in serie deve essere necessariamente di terzo grado e proporzionale a  $xyz$ . Infatti, ogni termine di grado inferiore al terzo (come ad esempio  $x$ ,  $x^2$ ,  $xy$ , ecc.) o di terzo grado, ma diverso da  $xyz$ , è pari almeno in una delle variabili e non può quindi apparire nello sviluppo di  $V(x, y, z)$ .

## Appello straordinario, 15 giugno 2010

1. Osserviamo innanzitutto che la condizione sotto la quale  $V_{\text{quad}}$  può essere trattato come una perturbazione è che il valore assoluto di un suo elemento di matrice tipico tra autostati imperturbati del sistema sia molto più piccolo della separazione tipica tra i livelli energetici imperturbati. Nel caso in questione, un elemento di matrice di  $V_{\text{quad}}$  tra stati imperturbati è di ordine  $A/a^3$ , con  $a$  il raggio di Bohr; la separazione tra livelli imperturbati è invece dell'ordine di  $e^2/a$ .

Il potenziale  $V_{\text{quad}}$  può essere considerato come la componente zero di un tensore sferico di rango due,  $V_{\text{quad}} = T_0^{(2)}$  (vedere Problema 2 del 14 luglio 2004). Osserviamo, inoltre, che è un operatore pari.

(a) Utilizzando la consueta notazione  $|n, l, m\rangle$  per un generico autostato dell'Hamiltoniana imperturbata, lo spostamento al prim'ordine del livello fondamentale ( $n = 1$ ) è dato dall'elemento di matrice

$$\langle 1, 0, 0 | T_0^{(2)} | 1, 0, 0 \rangle ,$$

che è nullo in virtù del teorema di Wigner-Eckart.

(b) Il I livello eccitato ( $n = 2$ ) è degenere, quindi va considerata la matrice formata dagli elementi del tipo

$$\langle 2, l', m' | T_0^{(2)} | 2, l, m \rangle ,$$

con  $l, l'=0,1$ . Per la regola di  $m$ -selezione possono essere diversi da zero solo gli elementi di matrice con  $m' = m$ . Ci si restringe quindi agli elementi di matrice del tipo

$$\langle 2, 0, 0 | T_0^{(2)} | 2, 0, 0 \rangle , \quad \langle 2, 1, 0 | T_0^{(2)} | 2, 0, 0 \rangle , \quad \langle 2, 0, 0 | T_0^{(2)} | 2, 1, 0 \rangle , \quad \langle 2, 1, m | T_0^{(2)} | 2, 1, m \rangle .$$

Il primo elemento di matrice è analogo a quello incontrato per il livello fondamentale ed è nullo per Wigner-Eckart. Il secondo e il terzo sono nulli per parità (si ricorda che la parità di uno stato con  $l$  definito è  $(-1)^l$ ). Gli unici elementi di matrice non nulli sono pertanto

$$\langle 2, 1, 1 | T_0^{(2)} | 2, 1, 1 \rangle , \quad \langle 2, 1, 0 | T_0^{(2)} | 2, 1, 0 \rangle , \quad \langle 2, 1, -1 | T_0^{(2)} | 2, 1, -1 \rangle ,$$

che hanno in comune l'elemento di matrice ridotto  $\langle 2, 1 || T^{(2)} || 2, 1 \rangle \equiv (\text{EMR})$ . In particolare

$$\langle 2, 1, 1 | T_0^{(2)} | 2, 1, 1 \rangle = \langle 2, 1, -1 | T_0^{(2)} | 2, 1, -1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(\text{EMR}) ,$$

$$\langle 2, 1, 0 | T_0^{(2)} | 2, 1, 0 \rangle = -\frac{2}{\sqrt{5}}(\text{EMR}) ,$$

Pertanto, il livello  $n = 2$  si separa in tre sottolivelli, con spostamenti dati da

$$\Delta_{2,0,0}^{(1)} = 0 ,$$

$$\Delta_{2,1,1}^{(1)} = \Delta_{2,1,-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{10}}(\text{EMR}) , \quad \Delta_{2,1,0}^{(1)} = -\frac{2}{\sqrt{5}}(\text{EMR}) .$$

(c) Per calcolare gli spostamenti è sufficiente determinare quanto vale (EMR). Possiamo farlo a partire da uno qualunque degli elementi di matrice del tipo  $\langle 2, 1, m | T_0^{(2)} | 2, 1, m \rangle$ . Scegliendo per semplicità quello con  $m = 0$ , abbiamo

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}(\text{EMR}) = \langle 2, 1, 0 | T_0^{(2)} | 2, 1, 0 \rangle = \langle 2, 1, 0 | V_{\text{quad}} | 2, 1, 0 \rangle = A \left\langle 2, 1, 0 \left| \frac{r^2 - 3z^2}{r^5} \right| 2, 1, 0 \right\rangle$$



$$= A \int d\vec{r} \frac{r^2 - 3z^2}{r^5} |\Psi_{210}|^2 = 2\pi A \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\infty r^2 dr \frac{r^2 - 3z^2}{r^5} R_{21}^2(r) |Y_0^1(\theta)|^2 = -\frac{A}{30a^3},$$

da cui segue

$$(\text{EMR}) = \frac{A\sqrt{5}}{60a^3}.$$

2. (a) Utilizzando la notazione di Dirac e indicando con  $|\Psi\rangle$  lo stato del sistema delle due particelle e con  $|+\rangle$ ,  $|-\rangle$  rispettivamente gli stati corrispondenti alle funzioni d'onda  $\psi_+(x)$  e  $\psi_-(x)$ , abbiamo per il caso bosonico/fermionico

$$|\Psi\rangle = N \left( |+\rangle|-\rangle \pm |-\rangle|+\rangle \right),$$

dove  $N$  è la costante di normalizzazione. Essa è fissata dalla condizione

$$\begin{aligned} 1 &= \langle\Psi|\Psi\rangle = |N|^2 \left( \langle+|+\rangle\langle-|-\rangle + \langle-|-\rangle\langle+|+\rangle \pm \langle+|-\rangle\langle-|+\rangle \pm \langle-|+\rangle\langle+|-\rangle \right) \\ &= |N|^2 \left( 1 + 1 \pm 2|\langle+|-\rangle|^2 \right) = 2|N|^2 \left( 1 \pm e^{-2\beta a^2} \right), \end{aligned}$$

avendo usato

$$\langle+|-\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_+(x)\psi_-(x) = e^{-\beta a^2}.$$

Segue pertanto che

$$N = \frac{1}{\sqrt{2(1 \pm e^{-2\beta a^2})}},$$

avendo posto uguale a zero la fase di  $N$ .

- (b) Scrivendo, con ovvia notazione,  $H = H_1 + H_2$ , abbiamo che il valor medio dell'energia totale è dato da

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= |N|^2 \left( \langle+|H_1|+\rangle + \langle-|H_1|-\rangle + \langle+|H_2|+\rangle + \langle-|H_2|-\rangle \right. \\ &\quad \left. \pm \langle+|H_1|-\rangle\langle-|+\rangle \pm \langle-|H_1|+\rangle\langle+|-\rangle \pm \langle+|H_2|-\rangle\langle-|+\rangle \pm \langle-|H_2|+\rangle\langle+|-\rangle \right) \\ &= 2|N|^2 \left( \langle+|H_1|+\rangle + \langle-|H_2|-\rangle \pm \langle+|H_1|-\rangle\langle-|+\rangle \pm \langle+|H_2|-\rangle\langle-|+\rangle \right), \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio è stato fatto uso dell'hermitianità di  $H_1$  e  $H_2$  e del fatto che  $\langle+|H_{1,2}|+\rangle = \langle-|H_{1,2}|-\rangle$ . Nel caso di particelle distinguibili, la prima nello stato  $|+\rangle$  e la seconda nello stato  $|-\rangle$ , avremmo trovato

$$\langle H \rangle_{\text{dist}} = \langle+|H_1|+\rangle + \langle-|H_2|-\rangle,$$

che differisce dall'espressione di sopra per i termini preceduti da  $\pm$  (si osservi che, nel limite di grande separazione tra le funzioni d'onda  $\psi_+(x)$  e  $\psi_-(x)$ , la costante di normalizzazione  $N$  vale circa  $1/\sqrt{2}$ ).

Calcoliamo ora  $\langle H \rangle$ . Gli ingredienti sono

$$\begin{aligned} \langle+|H_1|+\rangle &= \langle-|H_1|-\rangle = \langle+|H_2|+\rangle = \langle-|H_2|-\rangle = \frac{\beta\hbar^2}{4m}, \\ \langle+|H_1|-\rangle &= \langle-|H_1|+\rangle = \langle+|H_2|-\rangle = \langle-|H_2|+\rangle = \frac{\beta\hbar^2}{4m} (1 - 2\beta a^2) e^{-\beta a^2}, \end{aligned}$$

e l'espressione già trovata per  $\langle+|-\rangle = \langle-|+\rangle$ . Il risultato finale è

$$\langle H \rangle = \frac{\beta\hbar^2}{2m} \frac{1 \pm (1 - 2\beta a^2) e^{-2\beta a^2}}{1 \pm e^{-2\beta a^2}},$$

mentre per particelle distinguibili avremmo trovato

$$\langle H \rangle_{\text{dist}} = \frac{\beta \hbar^2}{2m} .$$

(c) La forza efficace  $F = -\partial \langle H \rangle / \partial a$  nel caso bosonico risulta essere

$$F_{\text{bosoni}} = \frac{2\beta^2 \hbar^2 a}{m} \frac{1 + (1 - 2\beta a^2)e^{2\beta a^2}}{(1 + e^{2\beta a^2})^2} ,$$

che è minore di zero (attrattiva) per  $\beta a^2 \gg 1$ ; nel caso fermionico abbiamo invece

$$F_{\text{fermioni}} = \frac{2\beta^2 \hbar^2 a}{m} \frac{1 - (1 - 2\beta a^2)e^{2\beta a^2}}{(1 - e^{2\beta a^2})^2} ,$$

che è sempre maggiore di zero (repulsiva).

## I prova di recupero, 14 luglio 2010

1. La condizione sotto la quale  $V_{\text{quad}}$  può essere trattato come una perturbazione è che il valore assoluto di un suo elemento di matrice tipico tra autostati imperturbati del sistema sia molto più piccolo della separazione tipica tra i livelli energetici imperturbati. Nel caso in questione, un elemento di matrice di  $V_{\text{quad}}$  tra stati imperturbati è di ordine  $A/a^3$ , con  $a$  il raggio di Bohr; la separazione tra livelli imperturbati è invece dell'ordine di  $e^2/a$ .

Il potenziale  $V_{\text{quad}}$  può essere considerato come la componente zero di un tensore sferico di rango due,  $V_{\text{quad}} = T_0^{(2)}$  (vedere Problema 2 del 14 luglio 2004). Osserviamo, inoltre, che è un operatore pari.

- (a) Il II livello eccitato ( $n = 3$ ) è degenere, quindi va considerata la matrice formata dagli elementi del tipo

$$\langle 3, l', m' | T_0^{(2)} | 3, l, m \rangle ,$$

con  $l, l'=0,1,2$  e dove abbiamo usato la consueta notazione  $|n, l, m\rangle$  per un generico autostato dell'Hamiltoniana imperturbata.

Per la regola di  $m$ -selezione possono essere diversi da zero solo gli elementi di matrice con  $m' = m$ . In virtù del teorema di Wigner-Eckart e della parità (si ricorda che la parità di uno stato con  $l$  definito è  $(-1)^l$ ) si può far vedere che gli elementi di matrice non nulli sono

$$\begin{aligned} \langle 3, 2, 2 | T_0^{(2)} | 3, 2, 2 \rangle &= \langle 3, 2, -2 | T_0^{(2)} | 3, 2, -2 \rangle , \\ \langle 3, 2, 1 | T_0^{(2)} | 3, 2, 1 \rangle &= \langle 3, 2, -1 | T_0^{(2)} | 3, 2, -1 \rangle , \\ &\langle 3, 2, 0 | T_0^{(2)} | 3, 2, 0 \rangle , \\ \langle 3, 1, 1 | T_0^{(2)} | 3, 1, 1 \rangle &= \langle 3, 1, -1 | T_0^{(2)} | 3, 1, -1 \rangle , \\ &\langle 3, 1, 0 | T_0^{(2)} | 3, 1, 0 \rangle , \\ \langle 3, 2, 0 | T_0^{(2)} | 3, 0, 0 \rangle &= \langle 3, 0, 0 | T_0^{(2)} | 3, 2, 0 \rangle . \end{aligned}$$

Gli elementi di matrice ridotti che servono sono pertanto

$$\langle 3, 2 || T^{(2)} || 3, 2 \rangle , \quad \langle 3, 1 || T^{(2)} || 3, 1 \rangle , \quad \langle 3, 2 || T^{(2)} || 3, 0 \rangle .$$

- (b) Attraverso il teorema di Wigner-Eckart, possiamo calcolare il primo dei tre elementi di matrice ridotti di sopra:

$$\begin{aligned} -\sqrt{\frac{2}{7}} \langle 3, 2 || T^{(2)} || 3, 2 \rangle &= \langle 3, 2, 0 | T_0^{(2)} | 3, 2, 0 \rangle \\ &= A \int d\vec{r} \frac{r^2 - 3z^2}{r^5} |\Psi_{210}|^2 = 2\pi A \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\infty r^2 dr \frac{r^2 - 3z^2}{r^5} R_{32}^2(r) |Y_0^2(\theta)|^2 = -\frac{4A}{2835a^3} . \end{aligned}$$

- (c) Come si può vedere dalle relazioni tra gli elementi di matrice non nulli, e assumendo che non ci siano degenerazioni accidentali, il livello  $n = 3$  si separa in sei sottolivelli:

$$\begin{aligned} \Delta_{3,2,2}^{(1)} &= \Delta_{3,2,-2}^{(1)} , & \Delta_{3,2,1}^{(1)} &= \Delta_{3,2,-1}^{(1)} , & \Delta_{3,2,0}^{(1)} , \\ \Delta_{3,1,1}^{(1)} &= \Delta_{3,1,-1}^{(1)} , & \Delta_{3,2,0}^{(1)} , & \pm \Delta_{3,2,0-3,0,0}^{(1)} , \end{aligned}$$

dove con  $\Delta_{3,2,0-3,0,0}^{(1)}$  abbiamo indicato l'autovalore del minore della matrice della perturbazione formato dalle righe e dalle colonne relative agli stati  $|3, 0, 0\rangle$  e  $|3, 2, 0\rangle$ .

2. Trattandosi di un sistema di fermioni, la funzione d'onda totale deve essere antisimmetrica sotto lo scambio delle due particelle. Poiché la funzione d'onda di spin è quella di tripletto (simmetrica), la funzione d'onda del moto spaziale degli elettroni deve essere antisimmetrica. Dal momento che l'interazione tra i due elettroni dipende solo dalla loro posizione relativa, è opportuno descrivere il sistema in termini delle coordinate del centro di massa e del moto relativo, date rispettivamente da

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad x = x_1 - x_2.$$

Rispetto a queste coordinate e ai loro momenti coniugati,  $P$  e  $p$ , l'Hamiltoniana del sistema di scrive

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + V(x),$$

dove  $M = 2m$  è la massa totale,  $\mu = m/2$  la massa ridotta e  $V(x)$  il potenziale di una buca unidimensionale infinita. Una Hamiltoniana siffatta è evidentemente separabile, quindi le sue autofunzioni sono della forma

$$\psi_{E,n}(X, x) = \Psi_E(X)\psi_n(x),$$

dove

$$\Psi_E(X) = \frac{e^{iPX/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}},$$

è l'autofunzione della Hamiltoniana (libera) relativa al moto del centro di massa con autovalore  $E = P^2/(2M)$ , mentre

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

con  $n = 1, 2, \dots$  è l'autofunzione della Hamiltoniana di una particella di massa  $\mu$  in una buca unidimensionale infinita di larghezza  $a$  relativa all'autovalore  $E_n = n^2\pi^2\hbar^2/(2\mu a^2)$ .

Lo stato fondamentale per momento totale  $P$  nullo è quello corrispondente al minimo valore di  $n$  compatibile con l'antisimmetria della funzione d'onda spaziale. Osservando che lo scambio delle coordinate  $x_1$  e  $x_2$  lascia invariata la posizione del centro di massa  $X$  e fa cambiare di segno la coordinate del moto relativo  $x$ , l'antisimmetria della funzione d'onda spaziale implica che  $\psi_n(x)$  deve essere una funzione dispari. Il più piccolo valore di  $n$  per cui ciò succede è  $n = 2$ . Quindi lo stato di più bassa energia con momento nullo è

$$\psi_{0,2}(X, x) = \psi_2(x),$$

che ha energia pari a  $2\pi^2\hbar^2/(\mu a^2)$ .

## II prova di recupero, 16 settembre 2010

1. Osserviamo innanzitutto che l'Hamiltoniana  $H_0$  di un oscillatore armonico tridimensionale isotropo è della forma

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= \left[ \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \right] + \left[ \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}y^2 \right] + \left[ \frac{p_z^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}z^2 \right] \\ &\equiv H_{0,x} + H_{0,y} + H_{0,z} . \end{aligned}$$

Di ciascuna Hamiltoniana  $H_{0,i}$ ,  $i = x, y, z$ , conosciamo gli autostati  $|n_i\rangle$  ed i rispettivi autovalori,  $E_{n_i} = \hbar\omega(n_i + 1/2)$ , con  $n_i = 0, 1, \dots$ . Pertanto, gli autostati di  $H_0$  sono della forma

$$|n_x, n_y, n_z\rangle|\pm\rangle \equiv |n_x\rangle|n_y\rangle|n_z\rangle|\pm\rangle$$

e gli autovalori corrispondenti sono  $E_{n_x, n_y, n_z} = E_{n_x} + E_{n_y} + E_{n_z} = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z + 3/2)$ . Il livello fondamentale è quello corrispondente a  $n_x = n_y = n_z = 0$  ed è pari ad  $E_{0,0,0} = 3\hbar\omega/2$ . Esso è due volte degenere, perché può essere realizzato in due stati di spin diversi.

È possibile trattare  $V$  come una perturbazione del sistema se il valore assoluto dei suoi elementi di matrice è molto piccolo rispetto alla separazione tipica tra i livelli imperturbati. Ciò implica

$$|\lambda|a_0\frac{\hbar}{2} \ll \hbar\omega \quad \longrightarrow \quad |\lambda| \ll \frac{2\omega}{a_0} ,$$

dove  $a_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$  è la lunghezza caratteristica dell'oscillatore armonico.

La perturbazione  $V$  non ha alcun effetto sul livello fondamentale al prim'ordine perturbativo, poiché

$$\begin{aligned} \langle 0, 0, 0 | \langle \pm | (\vec{r} \cdot \vec{s}) | 0, 0, 0 \rangle | \pm \rangle &= \langle 0, 0, 0 | \langle \pm | (x s_x + y s_y + z s_z) | 0, 0, 0 \rangle | \pm \rangle \\ &= \langle 0 | x | 0 \rangle \langle \pm | s_x | \pm \rangle + \langle 0 | y | 0 \rangle \langle \pm | s_y | \pm \rangle + \langle 0 | z | 0 \rangle \langle \pm | s_z | \pm \rangle = 0 . \end{aligned}$$

Passiamo a considerare l'effetto al second'ordine perturbativo sullo stato  $|0, 0, 0\rangle|+\rangle$  (le cose vanno in modo identico per lo stato  $|0, 0, 0\rangle|-\rangle$ ). Lo spostamento è dato da

$$\begin{aligned} \Delta_{0,0,0,+}^{(2)} &= \sum_{\{n_x, n_y, n_z\} \neq \{0,0,0\}} \frac{|\langle n_x, n_y, n_z | \langle s | (\lambda \vec{r} \cdot \vec{s}) | 0, 0, 0 \rangle | + \rangle|^2}{E_{0,0,0} - E_{n_x, n_y, n_z}} \\ &= |\lambda|^2 \left[ \frac{|\langle 1, 0, 0 | \langle - | (x s_x) | 0, 0, 0 \rangle | + \rangle|^2}{E_{0,0,0} - E_{1,0,0}} + \frac{|\langle 0, 1, 0 | \langle - | (y s_y) | 0, 0, 0 \rangle | + \rangle|^2}{E_{0,0,0} - E_{0,1,0}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{|\langle 0, 0, 1 | \langle + | (z s_z) | 0, 0, 0 \rangle | + \rangle|^2}{E_{0,0,0} - E_{0,0,1}} \right] \\ &= -\frac{|\lambda|^2}{\hbar\omega} \left[ |\langle 1 | x | 0 \rangle \langle - | s_x | + \rangle|^2 + |\langle 1 | y | 0 \rangle \langle - | s_y | + \rangle|^2 + |\langle 1 | z | 0 \rangle \langle + | s_z | + \rangle|^2 \right] \\ &= -\frac{|\lambda|^2}{\hbar\omega} \left[ 3 \frac{\hbar}{2m\omega} \left( \frac{\hbar}{2} \right)^2 \right] = -\frac{3|\lambda|^2 \hbar^2}{8m\omega^2} . \end{aligned}$$

2. Gli autostati del sistema imperturbato, cioè del sistema descritto dall'Hamiltoniana  $H_0$ , sono della forma

$$|n, l, m\rangle|\pm\rangle_e|\pm\rangle_p , \quad n = 1, 2, \dots , \quad l = 0, \dots, n-1 , \quad m = -l, \dots, +l ,$$

dove  $|\pm\rangle_{e,p}$  rappresenta lo stato di spin dell'elettrone o del positrone. Lo spettro di  $H_0$  dipende solo dal numero quantico  $n$  ed ha la stessa forma di quello dell'atomo di idrogeno non-relativistico, con la massa ridotta del sistema elettrone-protone rimpiazzata da quella del sistema elettrone-positrone, che è uguale a  $m/2$ , detto  $m$  il valore comune della massa di elettrone e positrone. Per lo stato fondamentale del sistema abbiamo  $n = 1, l = 0$ .

(a) Quando  $\vec{B} = 0$ , è conveniente usare per gli stati di spin la base formata dagli autostati dello spin totale, cioè quella formata dagli stati di singoletto,  $|S = 0, S_z = 0\rangle$ , e da quelli di tripletto  $|S = 1, S_z\rangle$ , con  $S_z = \pm 1, 0$ . Rispetto a questa base,  $H_S$  è infatti diagonale, potendosi scrivere

$$H_S = \frac{A}{2}(\vec{S}^2 - \vec{s}_e^2 - \vec{s}_p^2).$$

Abbiamo allora che  $H_S$  ha come autovalori

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} \left( 2\hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2 \right) &= \frac{A\hbar^2}{4} && \text{tripletto,} \\ \frac{A}{2} \left( 0 - \frac{3}{4}\hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2 \right) &= -\frac{3A\hbar^2}{4} && \text{singoletto.} \end{aligned}$$

Di conseguenza  $H_S$  produce la separazione del livello fondamentale in due livelli, uno (tre volte degenere) che si sposta di  $A\hbar^2/4$ , l'altro (non degenere) che si sposta di  $-3A\hbar^2/4$ .

(b) Orientando l'asse  $z$  lungo la direzione del campo magnetico  $\vec{B}$  e osservando che elettrone e positrone hanno carica opposta, il termine  $H_B$  si può scrivere come segue:

$$H_B = -\frac{eB}{mc}(s_{z,e} - s_{z,p}).$$

Lo spostamento del singoletto è dato, al prim'ordine in teoria delle perturbazioni, da (pedici  $e, p$  omessi per semplicità)

$$\begin{aligned} \langle 0, 0 | H_B | 0, 0 \rangle &= -\frac{eB}{mc} \frac{1}{2} \left( \langle + | \langle - | - \langle - | \langle + | \right) (s_{z,e} - s_{z,p}) \left( | + \rangle | - \rangle - | - \rangle | + \rangle \right) \\ &= -\frac{eB}{mc} \frac{1}{2} \left( \langle + | \langle - | - \langle - | \langle + | \right) \frac{\hbar}{2} \left( | + \rangle | - \rangle + | - \rangle | + \rangle + | + \rangle | - \rangle + | - \rangle | + \rangle \right) = 0. \end{aligned}$$

Anche sul tripletto  $H_B$  non produce effetto al prim'ordine, infatti

$$\begin{aligned} (s_{z,e} - s_{z,p}) | 1, 1 \rangle &= (s_{z,e} - s_{z,p}) | + \rangle | + \rangle = 0, \\ (s_{z,e} - s_{z,p}) | 1, 0 \rangle &= (s_{z,e} - s_{z,p}) \frac{1}{\sqrt{2}} \left( | + \rangle | - \rangle + | - \rangle | + \rangle \right) = \hbar \frac{1}{\sqrt{2}} \left( | + \rangle | - \rangle - | - \rangle | + \rangle \right) = \hbar | 0, 0 \rangle, \\ (s_{z,e} - s_{z,p}) | 1, -1 \rangle &= (s_{z,e} - s_{z,p}) | - \rangle | - \rangle = 0, \end{aligned}$$

da cui segue che la matrice rappresentativa di  $H_B$  sull'autospazio generato dagli stati del tripletto è identicamente nulla.

A questi risultati si poteva pervenire immediatamente attraverso il teorema della proiezione (Sakurai, (3.10.40)): siccome  $H_B$  è proporzionale alla componente  $z$  di un vettore, i suoi elementi di matrice su stati con spin totale definito devono essere proporzionali a quelli della componente dello spin totale  $S_z$ . Il coefficiente di proporzionalità è dato da un valor medio dell'operatore

$$(\vec{s}_e - \vec{s}_p) \cdot \vec{S} = (\vec{s}_e - \vec{s}_p) \cdot (\vec{s}_e + \vec{s}_p) = (\vec{s}_e^2 - \vec{s}_p^2),$$

che è sempre uguale a zero per il sistema in esame.

(c) In questo caso, dovendo trattare  $H_B$  come perturbazione di  $H_0$ , conviene adottare per gli stati di spin di elettrone e positrone la base  $|\pm\rangle_e|\pm\rangle_p$ , che è base di autostati per  $H_B$ . Abbiamo allora

$$\begin{aligned} H_B|+\rangle_e|+\rangle_p &= -\frac{eB}{mc}(s_{z,e} - s_{z,p})|+\rangle_e|+\rangle_p = 0, \\ H_B|+\rangle_e|-\rangle_p &= -\frac{eB}{mc}(s_{z,e} - s_{z,p})|+\rangle_e|-\rangle_p = -\frac{eB\hbar}{mc}|+\rangle_e|-\rangle_p, \\ H_B|-\rangle_e|+\rangle_p &= -\frac{eB}{mc}(s_{z,e} - s_{z,p})|-\rangle_e|+\rangle_p = +\frac{eB\hbar}{mc}|-\rangle_e|+\rangle_p, \\ H_B|-\rangle_e|-\rangle_p &= -\frac{eB}{mc}(s_{z,e} - s_{z,p})|-\rangle_e|-\rangle_p = 0, \end{aligned}$$

da cui si leggono immediatamente gli spostamenti energetici.

3. Trattandosi di un sistema di fermioni, la funzione d'onda totale deve essere antisimmetrica sotto lo scambio delle due particelle. Poiché la funzione d'onda di spin è quella di singoletto (antisimmetrica), la funzione d'onda del moto spaziale degli elettroni deve essere simmetrica. Dal momento che l'interazione tra i due elettroni dipende solo dalla loro posizione relativa, è opportuno descrivere il sistema in termini delle coordinate del centro di massa e del moto relativo, date rispettivamente da

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad x = x_1 - x_2.$$

Rispetto a queste coordinate e ai loro momenti coniugati,  $P$  e  $p$ , l'Hamiltoniana del sistema si scrive

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + V(x),$$

dove  $M = 2m$  è la massa totale,  $\mu = m/2$  la massa ridotta e  $V(x)$  il potenziale di un oscillatore armonico unidimensionale. Una Hamiltoniana siffatta è evidentemente separabile, quindi le sue autofunzioni sono della forma

$$\psi_{E,n}(X, x) = \Psi_E(X)\psi_n(x),$$

dove

$$\Psi_E(X) = \frac{e^{iPX/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}},$$

è l'autofunzione della Hamiltoniana (libera) relativa al moto del centro di massa con autovalore  $E = P^2/(2M)$ , mentre  $\psi_n(x)$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$ , è l'autofunzione della Hamiltoniana di una particella di massa  $\mu$  soggetta a potenziale armonico con pulsazione  $\omega' = \omega\sqrt{2}$ , relativa all'autovalore  $E_n = \hbar\omega'(n + 1/2)$ .

Lo stato fondamentale per momento totale  $P$  nullo è quello corrispondente al minimo valore di  $n$  compatibile con l'simmetria della funzione d'onda spaziale. Osservando che lo scambio delle coordinate  $x_1$  e  $x_2$  lascia invariata la posizione del centro di massa  $X$  e fa cambiare di segno la coordinate del moto relativo  $x$ , la simmetria della funzione d'onda spaziale implica che  $\psi_n(x)$  deve essere una funzione pari. Il più piccolo valore di  $n$  per cui ciò succede è  $n = 0$ . Quindi lo stato di più bassa energia con momento nullo è

$$\psi_{0,0}(X, x) = \psi_0(x),$$

che ha energia pari a  $\hbar\omega'/2$ .

## Appello straordinario, 17 novembre 2010

1. (a) L'operatore  $V$  è pari e può essere scritto come somma di componenti di un tensore sferico di rango 2 (vedere Problema 2 del 14 luglio 2004):

$$V = T_{+1}^{(2)} + T_{-1}^{(2)} .$$

Un generico elemento di matrice di  $V$  tra autostati del livello  $n = 3$ ,

$$\langle 3, l', m' | V | 3, l, m \rangle , \quad l, l' = 0, 1, 2 ,$$

è diverso da zero se  $m' = m \pm 1$  e se  $l$  ed  $l'$  hanno la stessa parità. Il teorema di Wigner-Eckart, insieme alla parità, impone che, se  $l = 0$  allora  $l' = 2$ , se  $l = 1$  allora  $l' = 1$ , se  $l = 2$  allora  $l' = 0, 2$ . Tenendo conto di queste regole di selezione, gli elementi di matrice non nulli risultano essere i seguenti:

$$\begin{aligned} & \langle 3, 2, 2 | V | 3, 2, 1 \rangle , & \langle 3, 2, 1 | V | 3, 2, 0 \rangle , & \langle 3, 2, 1 | V | 3, 0, 0 \rangle , \\ & \langle 3, 2, 0 | V | 3, 2, -1 \rangle , & \langle 3, 2, -1 | V | 3, 2, -2 \rangle , & \langle 3, 2, -1 | V | 3, 0, 0 \rangle , \\ & \langle 3, 1, 1 | V | 3, 1, 0 \rangle , & \langle 3, 1, 0 | V | 3, 1, -1 \rangle , & \end{aligned}$$

e i loro complessi coniugati.

- (b) Gli elementi di matrice ridotti che è necessario conoscere sono i seguenti tre:

$$\langle 3, 2 || T^{(2)} || 3, 2 \rangle , \quad \langle 3, 2 || T^{(2)} || 3, 0 \rangle , \quad \langle 3, 1 || T^{(2)} || 3, 1 \rangle .$$

- (c) In virtù del teorema di Wigner-Eckart (Sakurai, (3.10.31)), si ha che

$$\frac{\langle 3, 2, 2 | V | 3, 2, 1 \rangle}{\langle 3, 2, -1 | V | 3, 2, 0 \rangle} = \frac{\langle 3, 2, 2 | T_{+1}^{(2)} | 3, 2, 1 \rangle}{\langle 3, 2, -1 | T_{-1}^{(2)} | 3, 2, 0 \rangle} = \frac{\left( \langle 2, 1 | \langle 2, 1 | \right) | 2, 2 \rangle}{\left( \langle 2, -1 | \langle 2, 0 | \right) | 2, -1 \rangle} = \frac{-\sqrt{3/7}}{-\sqrt{1/14}} = \sqrt{6} .$$

2. Osserviamo innanzitutto che l'Hamiltoniana  $H_0$  di un oscillatore armonico tridimensionale isotropo è della forma

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= \left[ \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \right] + \left[ \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}y^2 \right] + \left[ \frac{p_z^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}z^2 \right] \\ &\equiv H_{0,x} + H_{0,y} + H_{0,z} . \end{aligned}$$

Di ciascuna Hamiltoniana  $H_{0,i}$ ,  $i = x, y, z$ , conosciamo gli autostati  $|n_i\rangle$  ed i rispettivi autovalori,  $E_{n_i} = \hbar\omega(n_i + 1/2)$ , con  $n_i = 0, 1, \dots$ . Pertanto, gli autostati di  $H_0$  sono della forma

$$|n_x, n_y, n_z\rangle \equiv |n_x\rangle |n_y\rangle |n_z\rangle$$

e gli autovalori corrispondenti sono  $E_{n_x, n_y, n_z} = E_{n_x} + E_{n_y} + E_{n_z} = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z + 3/2)$ . Il livello fondamentale è quello corrispondente a  $n_x = n_y = n_z = 0$  ed è pari ad  $E_{0,0,0} = 3\hbar\omega/2$ . Esso non è degenere.

Se il sistema è sottoposto ad un campo elettrico uniforme diretto lungo  $z$  di ampiezza pari ad  $E$ , l'Hamiltoniana viene modificata con l'aggiunta del termine  $V = -qEz$ , che può essere trattato come perturbazione se il valore assoluto dei suoi elementi di matrice è molto piccolo rispetto alla separazione tipica tra i livelli imperturbati. Ciò implica

$$qEa_0 \ll \hbar\omega ,$$



dove  $a_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$  è la lunghezza caratteristica dell'oscillatore armonico.

La perturbazione  $V$  non ha alcun effetto sul livello fondamentale al prim'ordine perturbativo, poiché

$$\langle 0, 0, 0 | qEz | 0, 0, 0 \rangle = qE \langle 0 | 0 \rangle \langle 0 | 0 \rangle \langle 0 | z | 0 \rangle = 0 .$$

Passiamo a considerare l'effetto al second'ordine perturbativo sullo stato fondamentale. Lo spostamento è dato da

$$\begin{aligned} \Delta_{0,0,0}^{(2)} &= \sum_{\{n_x, n_y, n_z\} \neq \{0,0,0\}} \frac{|\langle n_x, n_y, n_z | qEz | 0, 0, 0 \rangle|^2}{E_{0,0,0} - E_{n_x, n_y, n_z}} = q^2 E^2 \frac{|\langle 0, 0, 1 | z | 0, 0, 0 \rangle|^2}{E_{0,0,0} - E_{0,0,1}} \\ &= \frac{q^2 E^2}{-\hbar\omega} |\langle 0 | 0 \rangle \langle 0 | 0 \rangle \langle 1 | z | 0 \rangle|^2 = \frac{q^2 E^2}{-\hbar\omega} \left( \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \right)^2 = -\frac{q^2 E^2}{2m\omega^2} . \end{aligned}$$

Questo risultato può essere verificato mediante il calcolo esatto (vedere Problema 1 del 14 aprile 2005).

3. (a) Le funzioni d'onda per un sistema di fermioni devono essere antisimmetriche sotto lo scambio di una qualunque coppia, pertanto le possibilità sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \psi_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2) - \psi_2(\vec{r}_1)\psi_1(\vec{r}_2)) , \\ \psi_{13}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(\vec{r}_1)\psi_3(\vec{r}_2) - \psi_3(\vec{r}_1)\psi_1(\vec{r}_2)) , \\ \psi_{23}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_2(\vec{r}_1)\psi_3(\vec{r}_2) - \psi_3(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2)) . \end{aligned}$$

(b) Abbiamo

$$\langle \psi_{13} | V | \psi_{12} \rangle = \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 \psi_{13}^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2) V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \psi_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) .$$

Utilizzando le espressioni per  $\psi_{12}$  e  $\psi_{13}$ , questo integrale si scrive come la somma di quattro termini che risultano essere a due a due uguali, come si può verificare operando il cambio di variabili di integrazione  $\vec{r}_1 \leftrightarrow \vec{r}_2$  e utilizzando la proprietà  $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$ . Il risultato finale è

$$\langle \psi_{13} | V | \psi_{12} \rangle = \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 \psi_1^*(\vec{r}_1)\psi_3^*(\vec{r}_2) V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) [\psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2) - \psi_2(\vec{r}_1)\psi_1(\vec{r}_2)] .$$

Le cose vanno in modo analogo per gli altri elementi di matrice.

**Prova finale, 29 marzo 2011**

1. Consideriamo prima  $H_B$  come perturbazione di  $H_0$ . Usando come base gli autostati di  $H_0$  con definiti momento angolare orbitale e spin, indicati con  $|n, l, m_l\rangle|m_s\rangle$ , che sono anche autostati di  $H_B$ , abbiamo che gli spostamenti al I ordine sono dati da

$$\Delta_B^{(1)} = -\hbar \frac{eB}{2mc} (m_l + 2m_s) \equiv -\hbar\omega (m_l + 2m_s) .$$

Sul livello  $n = 2$ , per il quale i possibili valori di  $l$  sono 0 e 1, abbiamo i seguenti valori per gli spostamenti al I ordine  $\Delta_B^{(1)}$  e i relativi autostati imperturbati:

$$\begin{aligned} \Delta_B^{(1)} &= -2 \hbar\omega & |2, 1, 1\rangle|+\rangle , \\ \Delta_B^{(1)} &= -\hbar\omega , & |2, 1, 0\rangle|+\rangle , \quad |2, 0, 0\rangle|+\rangle , \\ \Delta_B^{(1)} &= 0 , & |2, 1, 1\rangle|-\rangle , \quad |2, 1, -1\rangle|+\rangle , \\ \Delta_B^{(1)} &= +\hbar\omega , & |2, 1, 0\rangle|-\rangle , \quad |2, 0, 0\rangle|-\rangle , \\ \Delta_B^{(1)} &= +2 \hbar\omega , & |2, 1, -1\rangle|-\rangle . \end{aligned}$$

Dobbiamo ora considerare l'effetto di  $H_{SF}$ . Sui livelli che a valle della perturbazione  $H_B$  risultano non-degeneri, è sufficiente calcolare il valor medio di  $H_{SF}$  per ottenere lo spostamento al I ordine. Per gli altri livelli, che sono doppiamente degeneri, va costruita e diagonalizzata la matrice rappresentativa della perturbazione  $H_{SF}$ . In realtà, in tutti i casi questa matrice rappresentativa è diagonale. Infatti è evidente che gli autostati imperturbati  $|n, l, m_l\rangle|m_s\rangle$  sono anche autostati per il primo e per il terzo termine di  $H_{SF}$ . Il secondo termine di  $H_{SF}$  è proporzionale a

$$\vec{L} \cdot \vec{S} = L_z S_z + \frac{1}{2}(L_+ S_- + L_- S_+)$$

ed eventuali contributi non-diagonali potrebbero derivare solo dai termini con  $L_{\pm} S_{\mp}$ . Ma ciò non succede mai, perché vale

$$\begin{aligned} \Delta_B^{(1)} &= -\hbar\omega , & \langle 2, 1, 0 | \langle + | (L_+ S_- + L_- S_+) | 2, 0, 0 \rangle | + \rangle &= 0 , \\ \Delta_B^{(1)} &= 0 , & \langle 2, 1, 1 | \langle - | (L_+ S_- + L_- S_+) | 2, 1, -1 \rangle | + \rangle &= 0 , \\ \Delta_B^{(1)} &= +\hbar\omega , & \langle 2, 1, 0 | \langle - | (L_+ S_- + L_- S_+) | 2, 0, 0 \rangle | - \rangle &= 0 . \end{aligned}$$

In definitiva, per calcolare gli spostamenti al I ordine dovuti ad  $H_{SF}$  è sufficiente calcolare i valori medi sugli autostati imperturbati. Abbiamo allora (si veda il Problema 1 del 22 aprile 2008)

$$\begin{aligned} \Delta_{SF}^{(1)} &= \langle 2, 1, m_l | \langle m_s | - \frac{(\vec{p}^2)^2}{8m^3 c^2} | 2, 1, m_l \rangle | m_s \rangle = - \frac{7me^8}{384c^2 \hbar^4} , \\ \Delta_{SF}^{(1)} &= \langle 2, 0, 0 | \langle m_s | - \frac{(\vec{p}^2)^2}{8m^3 c^2} | 2, 0, 0 \rangle | m_s \rangle = - \frac{13me^8}{128c^2 \hbar^4} , \\ \Delta_{SF}^{(1)} &= \langle 2, l, m_l | \langle m_s | \frac{e^2}{2m^2 r^3 c^2} \vec{L} \cdot \vec{S} | 2, l, m_l \rangle | m_s \rangle = \frac{e^2}{2m^2 c^2} \frac{m_l m_s}{8a^3 l(l+1/2)(l+1)} , \\ &\langle 2, l, m_l | \langle m_s | \frac{e^2 \pi \hbar^2}{2m^2 c^2} \delta(\vec{r}) | 2, l, m_l \rangle | m_s \rangle = \frac{me^8}{16c^2 \hbar^4} \delta_{l0} . \end{aligned}$$

A questo punto non resta che calcolare  $\Delta_B^{(1)} + \Delta_{SF}^{(1)}$  per ciascuno degli stati  $|2, l, m_l\rangle|m_s\rangle$  e osservare che la degenerazione è completamente rimossa.

2. (a) Trattandosi di un sistema di bosoni identici, la funzione d'onda deve essere totalmente simmetrica. L'unico numero quantico che può cambiare è quello azimutale,  $m_i = +1, 0, -1$ . Dei  $3^3 = 27$  possibili stati, dobbiamo selezionare le combinazioni indipendenti di stati simmetrici. Esse sono quelle che si ottengono simmetrizzando i seguenti 10 stati, scritti nella notazione  $|m_1, m_2, m_3\rangle$ :

$$\begin{aligned}
 &|1, 1, 1\rangle, \quad |1, 1, 0\rangle, \quad |1, 1, -1\rangle, \\
 &|1, 0, 0\rangle, \quad |1, 0, -1\rangle, \\
 &|1, -1, -1\rangle, \\
 &|0, 0, 0\rangle, \quad |0, 0, -1\rangle, \\
 &|-1, 0, -1\rangle, \quad |-1, -1, -1\rangle.
 \end{aligned}$$

Tutte le altre scelte danno luogo, dopo la simmetrizzazione, a stati già considerati.

- (b) Nella composizione di tre momenti angolari orbitali  $l = 1$  il massimo valore per il numero quantico del momento angolare totale è  $l_{\text{tot}} = 3$  a cui corrispondono 7 stati totalmente simmetrici. Questi stati fanno sicuramente parte della lista costruita al punto precedente. Siccome in essa vi compare un solo stato con  $l_{\text{tot},z} = 2$ , (lo stato  $|1, 1, 0\rangle$ ), esso deve essere necessariamente quello appartenente al multipletto con  $l_{\text{tot}} = 3$ . Ciò implica che il multipletto degli stati con  $l_{\text{tot}} = 2$  non vi è contenuto. Di stati con  $l_{\text{tot},z} = 1$  ne troviamo due ( $|1, 1, -1\rangle$  e  $|1, 0, 0\rangle$ ). Uno di essi deve necessariamente appartenere al multipletto con  $l_{\text{tot}} = 3$ , l'altro deve avere allora  $l_{\text{tot}} = 1$ . Ciò significa che la lista di sopra deve contenere tutto il tripletto di stati con  $l_{\text{tot}} = 1$ . Dal momento che gli stati indipendenti sono in tutto 10, non c'è spazio per quelli con  $l_{\text{tot}} = 0$ .

## II prova finale, 24 giugno 2011

1. i) Se trascuriamo le correzioni relativistiche ai livelli energetici, la degenerazione dovuta alle variabili orbitali è pari a  $n^2$ . Se teniamo conto anche delle variabili di spin relative all'elettrone e al protone, la degenerazione dei livelli energetici diventa  $4n^2$ .

ii) Lo stato fondamentale  $n = 1$  dell'atomo di idrogeno ha  $l = 0$ , pertanto il campo magnetico si accoppia solo con i momenti magnetici di elettrone e protone. Posto l'asse  $z$  lungo la direzione del campo magnetico, abbiamo che l'Hamiltoniana di interazione ha la forma seguente:

$$V = -(\vec{\mu}_e + \vec{\mu}_p) \cdot B = \frac{eB}{2m_e c} \left( g_e S_z^{(e)} - g_p \frac{m_e}{m_p} S_z^{(p)} \right).$$

Scelta la seguente base per gli stati di spin,

$$\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\},$$

dove la prima variabile si riferisce all'elettrone e la seconda al protone, la matrice rappresentativa di  $V$  si scrive

$$\begin{aligned} & \frac{eB}{2m_e c} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - g_p \frac{m_e}{m_p} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{eB}{2m_e c} \begin{pmatrix} 1 - g_p \frac{m_e}{m_p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + g_p \frac{m_e}{m_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - g_p \frac{m_e}{m_p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 + g_p \frac{m_e}{m_p} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

da cui si vede che la degenerazione è completamente rimossa.

2. L'operatore  $x^2 - y^2$  è un operatore pari e può essere scritto come combinazione tensori sferici di rango due (vedere Problema 2 del 14 luglio 2004) nel modo seguente:

$$T_{+2}^{(2)} + T_{-2}^{(2)}.$$

Pertanto sono non nulli gli elementi di matrice del tipo

$$\langle 3, l', m' | (x^2 - y^2) | 2, l, m \rangle.$$

per i quali  $l$  ed  $l'$  siano entrambi pari o entrambi dispari e valga che  $m' = m \pm 2$ . Ciò riduce le possibilità ai seguenti elementi di matrice:

$$\langle 3, 2, 2 | (x^2 - y^2) | 2, 0, 0 \rangle = \langle 3, 2, 2 | T_{+2}^{(2)} | 2, 0, 0 \rangle = \left( \langle 2, 2; 0, 0 | 2, 2 \rangle \right) \cdot (\text{EMR}_1) = (\text{EMR}_1),$$

$$\langle 3, 2, -2 | (x^2 - y^2) | 2, 0, 0 \rangle = \langle 3, 2, -2 | T_{-2}^{(2)} | 2, 0, 0 \rangle = \left( \langle 2, -2; 0, 0 | 2, -2 \rangle \right) \cdot (\text{EMR}_1) = (\text{EMR}_1),$$

$$\langle 3, 1, 1 | (x^2 - y^2) | 2, 1, -1 \rangle = \langle 3, 1, 1 | T_{+2}^{(2)} | 2, 1, -1 \rangle = \left( \langle 2, 2; 1, -1 | 1, 1 \rangle \right) \cdot (\text{EMR}_2) = \sqrt{\frac{3}{5}} (\text{EMR}_2),$$

$$\langle 3, 1, -1 | (x^2 - y^2) | 2, 1, 1 \rangle = \langle 3, 1, -1 | T_{-2}^{(2)} | 2, 1, 1 \rangle = \left( \langle 2, -2; 1, 1 | 1, -1 \rangle \right) \cdot (\text{EMR}_2) = \sqrt{\frac{3}{5}} (\text{EMR}_2).$$

Da queste espressioni si vede che i quattro elementi di matrice non nulli sono uguali due a due.

3. Cominciamo dal caso  $n_1 \neq n_2$ . La funzione d'onda orbitale può essere data dalla combinazione simmetrica o da quella antisimmetrica delle funzioni d'onda delle due particelle:

$$\Psi_{\pm}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2) \pm \psi_{n_2}(x_1)\psi_{n_1}(x_2) \right).$$

Se le particelle in questione sono bosoni,  $s$  è necessariamente intero e  $2s$  è un numero pari. In questo caso, la  $\Psi_+$  deve accoppiarsi con una funzione di spin simmetrica, la  $\Psi_-$  con una funzione di spin antisimmetrica. Quando si compongono due stati di spin  $s$ , lo spin totale può valere  $2s, 2s - 1, \dots, 0$ . Gli stati simmetrici sono quelli con spin totale pari a  $2s, 2s - 2, \dots, 0$ ; il loro numero è dato da

$$\sum_{k=0}^s [2(2s - 2k) + 1] = 2s^2 + 3s + 1 = (2s + 1)(s + 1).$$

Gli stati antisimmetrici sono quelli con spin totale pari a  $2s - 1, 2s - 3, \dots, 1$ ; il loro numero è dato da

$$\sum_{k=0}^{s-1} [2(2s - 1 - 2k) + 1] = 2s^2 + s = (2s + 1)s.$$

Si noti che il numero totale degli stati di spin è pari, come deve essere, a  $(2s + 1)^2$ . Quindi, nel caso bosonico, il numero totale di stati indipendenti è pari a  $(2s + 1)^2$ : di questi  $(2s + 1)(s + 1)$  sono della forma  $\Psi_+\chi_+$  e  $(2s + 1)s$  sono della forma  $\Psi_-\chi_-$ , dove si è indicato con  $\chi_{\pm}$  una generica funzione d'onda di spin simmetrica o antisimmetrica.

Se le particelle in questione sono fermioni,  $s$  è necessariamente semi-intero e  $2s$  è un numero dispari. In questo caso, la  $\Psi_+$  deve accoppiarsi con una funzione d'onda di spin antisimmetrica, la  $\Psi_-$  con una funzione d'onda simmetrica. Quando si compongono due stati di spin  $s$ , lo spin totale può valere  $2s, 2s - 1, \dots, 0$ . Gli stati simmetrici sono quelli con spin totale pari a  $2s, 2s - 2, \dots, 1$  (si noti la differenza con il caso bosonico!); il loro numero è dato da

$$\sum_{k=0}^{s-1/2} [2(2s - 2k) + 1] = (2s + 1)(s + 1).$$

Gli stati antisimmetrici sono quelli con spin totale pari a  $2s - 1, 2s - 3, \dots, 0$ ; il loro numero è dato da

$$\sum_{k=0}^{s-1/2} [2(2s - 1 - 2k) + 1] = (2s + 1)s.$$

Si noti che il numero totale degli stati di spin è pari, come deve essere, a  $(2s + 1)^2$  e che il numero di stati simmetrici o antisimmetrici è lo stesso che nel caso bosonico, malgrado la diversa distribuzione degli stati nei multipletti. Quindi, nel caso fermionico, il numero totale di stati indipendenti è ancora pari a  $(2s + 1)^2$ : di questi  $(2s + 1)(s + 1)$  sono della forma  $\Psi_-\chi_+$  e  $(2s + 1)s$  sono della forma  $\Psi_+\chi_-$ .

Il caso  $n_1 = n_2$  è radicalmente diverso, perché la funzione d'onda orbitale deve essere necessariamente simmetrica. Ciò implica che nel caso bosonico il numero di stati indipendenti è pari a quello degli stati simmetrici di spin totale definito (pari a  $(2s + 1)(s + 1)$ ), mentre nel caso fermionico è pari a quello degli stati antisimmetrici di spin totale definito (pari a  $(2s + 1)s$ ).

## I prova di recupero, 20 luglio 2011

1. Il livello  $n = 2$  dell'atomo di idrogeno, se si ignora lo spin, avrebbe degenerazione 4, essendo realizzato per gli stati 2p, cioè con  $l = 1$  ( $m = +1, 0, -1$ , e per lo stato 2s, cioè con  $l = 0$  ( $m = 0$ )). Il Lamb shift produce una separazione tra i livelli 2s e 2p data da

$$\Delta E_{\text{Lamb}} \equiv E_{2s} - E_{2p} = h\nu \simeq 4.37 \times 10^{-6} \text{ eV} .$$

- (i) In assenza di spin, l'Hamiltoniana di interazione con il campo magnetico (diretto lungo  $z$ ) si scrive

$$H_B = \frac{eB}{2m_e c} L_z , \quad (e > 0) .$$

Essa non produce alcuno spostamento del livello degli stati  $|n = 2, l = 0, m = 0\rangle$  e  $|2, 1, 0\rangle$ , mentre produce un innalzamento del livello dello stato  $|2, 1, 1\rangle$  pari a

$$\Delta_B = \frac{eB}{2m_e c} \hbar$$

e un pari abbassamento del livello dello stato  $|2, 1, 1\rangle$ . La condizione che il livello degli stati  $|2, 0, 0\rangle$  e  $|2, 1, 1\rangle$  diventi degenere è data da

$$\Delta E_{\text{Lamb}} = \Delta_B \quad \longrightarrow \quad B_d = \frac{2m_e c \Delta E_{\text{Lamb}}}{e\hbar} .$$

- (ii) L'Hamiltoniana di interazione con il campo elettrico (diretto lungo  $x$ ) è data da

$$H_E = eEx .$$

La condizione per poter trattare l'interazione con il campo elettrico come una perturbazione di quella indotta dall'interazione con il campo magnetico è che il modulo degli elementi di matrice di  $H_E$  tra stati del livello  $n = 2$  sia molto più piccolo della separazione indotta dal campo magnetico  $B_d$ , cioè

$$eEa \ll \Delta_B = \Delta E_{\text{Lamb}} ,$$

dove  $a$  è il raggio di Bohr. Questa condizione è sicuramente soddisfatta, poiché  $eEa \simeq 5 \times 10^{-8}$  eV, a fronte di  $4.37 \times 10^{-6}$  eV.

Alla luce di quanto visto nel punto precedente, i livelli relativi agli stati  $|2, 1, -1\rangle$  e  $|2, 1, 0\rangle$  sono non-degeneri e su di essi l'effetto al I ordine dell'interazione con il campo elettrico è nullo, poiché

$$\langle 2, 1, -1 | eEx | 2, 1, -1 \rangle = \langle 2, 1, 0 | eEx | 2, 1, 0 \rangle = 0$$

per parità. Per il livello degenere corrispondente agli stati  $|2, 0, 0\rangle$  e  $|2, 1, 1\rangle$  dobbiamo costruire la matrice rappresentativa della perturbazione, data da

$$eE \begin{pmatrix} \langle 2, 0, 0 | x | 2, 0, 0 \rangle & \langle 2, 0, 0 | x | 2, 1, 1 \rangle \\ \langle 2, 1, 1 | x | 2, 0, 0 \rangle & \langle 2, 1, 1 | x | 2, 1, 1 \rangle \end{pmatrix} = eE \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} ,$$

dove l'elemento di matrice  $A$  può essere facilmente calcolato e risulta essere uguale a  $3a/\sqrt{2}$ . Gli autovalori di questa matrice, che danno gli spostamenti al I ordine, sono  $\pm eEA$  e gli autostati corrispondenti sono

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( |2, 0, 0\rangle \pm |2, 1, 1\rangle \right) .$$

2. L'operatore  $xy$  è un operatore pari e può essere scritto come combinazione di tensori sferici di rango due (vedere Problema 2 del 14 luglio 2004) nel modo seguente:

$$T_{+2}^{(2)} - T_{-2}^{(2)} .$$

Pertanto sono non nulli gli elementi di matrice del tipo

$$\langle 3, l', m' | xy | 2, l, m \rangle .$$

per i quali  $l$  ed  $l'$  siano entrambi pari o entrambi dispari e valga che  $m' = m \pm 2$ . Ciò riduce le possibilità ai seguenti elementi di matrice:

$$\langle 3, 2, 2 | xy | 2, 0, 0 \rangle = \langle 3, 2, 2 | T_{+2}^{(2)} | 2, 0, 0 \rangle = \left( \langle 2, 2; 0, 0 | 2, 2 \rangle \right) (\text{EMR}_1) = (\text{EMR}_1) ,$$

$$\langle 3, 2, -2 | xy | 2, 0, 0 \rangle = -\langle 3, 2, -2 | T_{-2}^{(2)} | 2, 0, 0 \rangle = -\left( \langle 2, -2; 0, 0 | 2, -2 \rangle \right) (\text{EMR}_1) = -(\text{EMR}_1) ,$$

$$\langle 3, 1, 1 | xy | 2, 1, -1 \rangle = \langle 3, 1, 1 | T_{+2}^{(2)} | 2, 1, -1 \rangle = \left( \langle 2, 2; 1, -1 | 1, 1 \rangle \right) (\text{EMR}_2) = \sqrt{\frac{3}{5}} (\text{EMR}_2) ,$$

$$\langle 3, 1, -1 | xy | 2, 1, 1 \rangle = -\langle 3, 1, -1 | T_{-2}^{(2)} | 2, 1, 1 \rangle = -\left( \langle 2, -2; 1, 1 | 1, -1 \rangle \right) (\text{EMR}_2) = -\sqrt{\frac{3}{5}} (\text{EMR}_2) .$$

Da queste espressioni si vede che i quattro elementi di matrice possono essere messi in corrispondenza due a due.

3. Per sistemi di due particelle, la simmetria di scambio coincide con la parità rispetto alla posizione relativa  $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ . Ciò implica che (vedere Problema 3 del 17 luglio 2006) gli stati di momento angolare relativo  $l$  pari o dispari hanno funzione d'onda orbitale rispettivamente simmetrica o antisimmetrica sotto lo scambio delle due particelle. Pertanto, per  $l$  pari, la funzione d'onda di spin totale deve essere simmetrica nel caso bosonico e antisimmetrica nel caso fermionico; per  $l$  dispari vale il viceversa. Per i valori dello spin totale  $S$  permessi nei due casi si rimanda alla soluzione del Problema 3 del 29 giugno 2011.

Per  $s = 0$  (sistema bosonico) abbiamo il solo stato di spin totale  $S=0$ , che è simmetrico, quindi  $l$  può essere solo pari.

## Prova finale, 16 febbraio 2012

1. La correzione relativistica dell'energia cinetica è data da

$$\Delta T \equiv T_{\text{rel}} - T_{\text{class}} = \left[ \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 \right] - \frac{p^2}{2m} = -\frac{p^4}{8m^3 c^2} + O(1/c^4).$$

Lo spostamento al prim'ordine del livello  $n$  di un oscillatore armonico unidimensionale è dato dalla formula

$$\Delta_n^{(1)} = \langle n^{(0)} | \Delta T | n^{(0)} \rangle = -\frac{1}{8m^3 c^2} \langle n^{(0)} | p^4 | n^{(0)} \rangle = -\frac{1}{8m^3 c^2} \left( \frac{m\omega\hbar}{2} \right)^2 \langle n^{(0)} | (a^\dagger - a)^4 | n^{(0)} \rangle.$$

Si trova facilmente che

$$\Delta_0^{(1)} = -\frac{3}{32} \frac{(\hbar\omega)^2}{mc^2}, \quad \Delta_1^{(1)} = -\frac{15}{32} \frac{(\hbar\omega)^2}{mc^2}.$$

Lo spostamento al prim'ordine dello stato fondamentale è dato da

$$\begin{aligned} |0^{(1)}\rangle &= \sum_{k \neq 0} \frac{\langle k^{(0)} | \Delta T | n^{(0)} \rangle}{E_0^{(0)} - E_k^{(0)}} |k^{(0)}\rangle = -\frac{1}{8m^3 c^2} \left( \frac{m\omega\hbar}{2} \right)^2 \sum_{k \neq 0} \frac{\langle k^{(0)} | (a^\dagger - a)^4 | n^{(0)} \rangle}{E_0^{(0)} - E_k^{(0)}} |k^{(0)}\rangle \\ &= \frac{1}{32} \frac{\hbar\omega}{mc^2} \left( -3\sqrt{2} |2^{(0)}\rangle + \sqrt{\frac{3}{2}} |4^{(0)}\rangle \right). \end{aligned}$$

2. L'operatore di quadrupolo  $Q$  può essere scritto come la componente  $q = 0$  di un tensore sferico di rango  $k = 2$ , pertanto il suo valor medio su uno stato di pura onda  $S$  sarebbe nullo, essendo

$$\langle \alpha, j = 0, m = 0 | T_0^{(2)} | \alpha, j = 0, m = 0 \rangle = 0,$$

in virtù del teorema di Wigner-Eckart.

3. Nella regione  $r > a$  l'equazione di Schrödinger radiale per la componente in onda  $l$  è data da

$$\varphi_l'' + \frac{2}{r} \varphi_l' + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \varphi_l = 0,$$

con  $k^2 = 2mE/\hbar^2$ , ed ammette la soluzione di particella libera,

$$\varphi_l(r) = e^{i\delta_l} [\cos \delta_l j_l(kr) - \sin \delta_l n_l(kr)], \quad r > a.$$

Nella regione  $r < a$  abbiamo invece

$$\varphi_l'' + \frac{2}{r} \varphi_l' + \left[ k^2 + U_0 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \varphi_l = 0,$$

con  $U_0 = 2mV_0/\hbar^2 > 0$ . Questa equazione si riduce alla stessa forma di quella della regione esterna se si pone

$$K = \sqrt{k^2 + U_0}.$$

La soluzione allora ha la stessa forma di quella nella regione esterna, pur di sostituire  $k$  con  $k'$  e di rimuovere il "pezzo" di soluzione con la funzione  $n_l$ , che non è regolare nel punto  $r = 0$  (questo problema non si pone ovviamente nella regione  $r > a$ ). Abbiamo allora

$$\varphi_l(r) = C_l j_l(Kr), \quad r < a.$$



Se imponiamo le condizioni di raccordo in  $r = a$ ,

$$\begin{cases} \varphi_l(a_-) = \varphi_l(a_+) \\ \varphi'_l(a_-) = \varphi'_l(a_+) \end{cases} ,$$

otteniamo

$$\begin{cases} C_l j_l(Ka) = e^{i\delta_l} [\cos \delta_l j_l(ka) - \sin \delta_l n_l(ka)] \\ C_l K j'_l(Ka) = e^{i\delta_l} k [\cos \delta_l j'_l(ka) - \sin \delta_l n'_l(ka)] \end{cases} .$$

Prendendo il rapporto membro a membro tra la seconda e la prima equazione, si ricava la seguente relazione:

$$K \frac{j'_l(Ka)}{j_l(Ka)} = k \frac{\cos \delta_l j'_l(ka) - \sin \delta_l n'_l(ka)}{\cos \delta_l j_l(ka) - \sin \delta_l n_l(ka)} ,$$

che conduce a

$$\tan \delta_l = \frac{K j'_l(Ka) j_l(ka) - k j_l(Ka) j'_l(ka)}{K j'_l(Ka) n_l(ka) - k j_l(Ka) n'_l(ka)} .$$

Nel limite di bassa energia possiamo limitarci a considerare l'onda  $l = 0$ , ottenendo

$$\tan \delta_0 = \frac{K j'_0(Ka) j_0(ka) - k j_0(Ka) j'_0(ka)}{K j'_0(Ka) n_0(ka) - k j_0(Ka) n'_0(ka)} \simeq -ka \frac{K a j'_0(Ka)}{K a j'_0(Ka) + j_0(Ka)} ,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato

$$j_0(x) \simeq 1 , \quad j'_0(x) \simeq 0 , \quad n_0(x) \simeq -\frac{1}{x} , \quad n'_0(x) \simeq \frac{1}{x^2} .$$

## I prova di recupero, 19 giugno 2012

1. La correzione relativistica dell'energia cinetica è data da

$$\Delta T \equiv T_{\text{rel}} - T_{\text{class}} = \left[ \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 \right] - \frac{\vec{p}^2}{2m} = -\frac{(\vec{p}^2)^2}{8m^3 c^2} + O(1/c^4) .$$

Lo spostamento al prim'ordine del livello fondamentale di un oscillatore armonico tridimensionale isotropo è dato dalla formula

$$\begin{aligned} \Delta_0^{(1)} &= \langle 0, 0, 0 | \Delta T | 0, 0, 0 \rangle = -\frac{1}{8m^3 c^2} \langle 0, 0, 0 | (\vec{p}^2)^2 | 0, 0, 0 \rangle \\ &= -\frac{1}{8m^3 c^2} \langle 0, 0, 0 | (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^2 | 0, 0, 0 \rangle , \end{aligned}$$

dove  $|0, 0, 0\rangle$  sta per  $|0\rangle_x |0\rangle_y |0\rangle_z$ . È facile vedere che il valor medio dell'espressione precedente si può scrivere in termini di valori medi sullo stato fondamentale di un oscillatore unidimensionale:

$$\langle 0, 0, 0 | (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^2 | 0, 0, 0 \rangle = 3\langle 0 | p^4 | 0 \rangle + 6\langle 0 | p^2 | 0 \rangle^2 = 3 \cdot \frac{3}{4} (m\omega\hbar)^2 + 6 \cdot \left( \frac{m\omega\hbar}{2} \right)^2 = \frac{15}{4} (m\omega\hbar)^2$$

2. L'operatore  $V = f(r) xy$  è un operatore *pari* e può essere scritto come combinazione di tensori sferici di rango due,

$$V = T_{+2}^{(2)} - T_{-2}^{(2)} .$$

Il rapporto  $R_2$  è banalmente nullo, perché al numeratore contiene l'elemento di matrice di un operatore pari tra stati con funzioni d'onda una pari e l'altra dispari. Il rapporto  $R_1$  non può essere calcolato senza conoscere la funzione  $f(r)$ , perché gli elementi di matrice al numeratore e al denominatore possono essere scritti, attraverso il teorema di Wigner-Eckart, in termini di elementi di matrice ridotti *diversi*. Il rapporto  $R_3$  è calcolabile senza conoscere  $f(r)$ ; infatti

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{\langle 3, 2, 1 | V | 3, 2, -1 \rangle}{\langle 3, 2, 0 | V | 3, 2, 2 \rangle} = \frac{\langle 3, 2, 1 | T_{+2}^{(2)} | 3, 2, -1 \rangle}{-\langle 3, 2, 0 | T_{-2}^{(2)} | 3, 2, 2 \rangle} = -\frac{\left( \langle 2, 2 | \langle 2, -1 | \right) | 2, 1 \rangle \cdot \langle 3, 2 | T^{(2)} | | 3, 2 \rangle}{\left( \langle 2, -2 | \langle 2, 2 | \right) | 2, 0 \rangle \cdot \langle 3, 2 | T^{(2)} | | 3, 2 \rangle} \\ &= -\frac{\sqrt{3/7}}{\sqrt{2/7}} = -\sqrt{\frac{3}{2}} . \end{aligned}$$

3. Sia nella regione  $r < r_0$  che nella regione  $r > r_0$  l'equazione di Schrödinger radiale per la componente in onda  $l$  è quella di una particella libera:

$$\varphi_l'' + \frac{2}{r} \varphi_l' + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \varphi_l = 0 ,$$

con  $k^2 = 2mE/\hbar^2$ , ed ammette pertanto soluzione generale della forma

$$\varphi_l(r) = A j_l(kr) + B n_l(kr) .$$

Tuttavia, la regione  $r < r_0$  include l'origine, dove la funzione  $n_l$  è singolare e deve pertanto essere rimossa dalla soluzione. La regione  $r > r_0$  include quella asintotica, in cui la soluzione può essere messa nella forma

$$\varphi_l(r) = e^{i\delta_l} [\cos \delta_l j_l(kr) - \sin \delta_l n_l(kr)] .$$

Abbiamo allora per l'onda  $S$

$$\begin{cases} \varphi_0(r) = A j_0(kr), & r < r_0 \\ \varphi_0(r) = e^{i\delta_0} [\cos \delta_0 j_0(kr) - \sin \delta_0 n_0(kr)], & r > r_0 \end{cases} .$$

Dobbiamo applicare adesso le condizioni di raccordo. Abbiamo anzitutto la condizione di continuità,

$$\varphi_0(r_0^-) = \varphi_0(r_0^+) \quad \longrightarrow \quad A j_0(kr_0) = e^{i\delta_0} [\cos \delta_0 j_0(kr_0) - \sin \delta_0 n_0(kr_0)] . \quad (1)$$

La derivata prima di  $\varphi_0(r)$  è invece *discontinua* in  $r_0$ , infatti intorno a quel punto l'equazione di Schrödinger si scrive

$$\varphi_l'' + \frac{2}{r} \varphi_l' + \left[ k^2 - \frac{2mV_0 r_0}{\hbar^2} \delta(r - r_0) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \varphi_l = 0 .$$

Integrando tutti i termini dell'equazione in  $r$  su un intervallo piccolo a piacere centrato intorno a  $r_0$ , si trova

$$\varphi_l'(r_0^+) - \varphi_l'(r_0^-) = \frac{2mV_0 r_0}{\hbar^2} \varphi_l(r_0) ,$$

da cui otteniamo (sempre per l'onda  $S$ )

$$k e^{i\delta_0} [\cos \delta_0 j_0'(kr_0) - \sin \delta_0 n_0'(kr_0)] - A k j_0'(kr_0) = \frac{2mV_0 r_0}{\hbar^2} A j_0(kr_0) . \quad (2)$$

Combinando le equazioni (1) e (2), otteniamo

$$\cot \delta_0 = \frac{\left( \frac{2mV_0 r_0}{\hbar^2} + k \frac{j_0'(kr_0)}{j_0(kr_0)} \right) n_0(kr_0) - k n_0'(kr_0)}{\frac{2mV_0 r_0}{\hbar^2} j_0(kr_0)} = -\cot(kr_0) - \frac{\hbar^2 k}{2mV_0 r_0} \frac{1}{\sin^2(kr_0)} ,$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso di

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x} , \quad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x} .$$

Dall'espressione per  $\cot \delta_0$  il contributo dell'onda  $S$  alla sezione d'urto totale può essere trovato facilmente.

## I prova finale, 6 febbraio 2013

1. Indicando con  $|n, j, m_j; l, s\rangle$  un generico autostato dell'Hamiltoniana non-relativistica di un atomo di idrogeno con definito momento angolare totale e usando il teorema della proiezione (Sakurai, (3.10.40)) otteniamo immediatamente

$$\begin{aligned} \langle n, j, m_j; l, s | S_z | n, j, m_j; l, s \rangle &= \langle j, m_j | J_z | j, m_j \rangle \frac{\langle n, j, m_j; l, s | \vec{J} \cdot \vec{S} | n, j, m_j; l, s \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \\ &= \hbar m_j \frac{1}{2} \frac{\langle n, j, m_j; l, s | (\vec{J}^2 + \vec{S}^2 - \vec{L}^2) | n, j, m_j; l, s \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \\ &= \hbar m_j \frac{1}{2} \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{j(j+1)}. \end{aligned}$$

Ora, ricordando che il numero quantico  $j$  risultante dalla composizione di un momento angolare orbitale  $l$  e dello spin  $s = 1/2$  può valere  $j = l + 1/2$  oppure  $j = l - 1/2$ , abbiamo che

$$\langle n, j, m_j; l, s | S_z | n, j, m_j; l, s \rangle = \hbar m_j \frac{1}{2} \frac{(l \pm 1/2)(l \pm 1/2 + 1) + 3/4 - l(l+1)}{(l \pm 1/2)(l \pm 1/2 + 1)} = \pm \frac{\hbar m_j}{2l+1},$$

che è il noto contributo dello spin al fattore di Landé.

2. Per effetto del decadimento, il potenziale coulombiano cambia improvvisamente, diciamo all'istante  $t = 0$ , da quello prodotto da un solo protone a quello di due protoni, pertanto è come se il sistema fosse stato sottoposto ad una perturbazione dipendente dal tempo, della forma

$$V = V_{\text{Coulomb}}(t \geq 0) - V_{\text{Coulomb}}(t < 0) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0)r} & t \geq 0 \end{cases}.$$

Vogliamo calcolare, al I ordine in teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo, la probabilità che il sistema passi da uno stato iniziale  $|i\rangle$  che coincide con lo stato fondamentale del trizio, a uno stato finale  $|f\rangle$ , che è dato invece dallo stato fondamentale dello ione  ${}^3\text{He}^+$ . In questo caso l'applicazione della teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo richiede qualche cautela, poiché lo stato finale non è, come si suppone solitamente, un autostato dell'Hamiltoniana imperturbata (in effetti, è un autostato dell'Hamiltoniana perturbata!). In particolare, non si possono usare le formule (5.6.17) del Sakurai.

Un modo di procedere è il seguente: si parte dalla (5.6.14),

$$|i, t\rangle_I = U_I(t)|i\rangle,$$

dove  $U_I(t)$  è l'operatore di evoluzione temporale nello schema di interazione che al I ordine vale

$$U_I^{(1)}(t) = \mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' V_I(t'), \quad V_I(t) \equiv e^{iH_0 t/\hbar} V(t) e^{-iH_0 t/\hbar},$$

con  $H_0$  l'Hamiltoniana imperturbata (cioè quella del trizio). A questo punto, per calcolare l'ampiezza di probabilità che il sistema si trovi al tempo  $t$  nello stato  $|f\rangle$ , si torna allo schema di Schrödinger,

$$|i, t\rangle_S = e^{-iH_0 t/\hbar} U_I^{(1)}(t)|i\rangle$$

e si scrive l'ampiezza come

$$\langle f | i, t \rangle_S = \langle f | e^{-iH_0 t/\hbar} U_I^{(1)}(t) | i \rangle.$$

Al I ordine essa diventa

$$\begin{aligned} & \langle f | e^{-iH_0 t/\hbar} | i \rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \langle f | e^{-iH_0 t'/\hbar} V_I(t') | i \rangle \\ & = e^{-iE_1^{(0)} t/\hbar} \langle f | i \rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \langle f | e^{-iH_0(t-t')/\hbar} V | i \rangle e^{-iE_1^{(0)} t'/\hbar} , \end{aligned}$$

dove  $E_1^{(0)}$  è il livello fondamentale del sistema imperturbato, cioè del trizio, che coincide con quello dell'atomo di idrogeno. Il secondo termine non è facilmente semplificabile. Nel limite  $t = 0$  l'ampiezza di probabilità si riduce, come deve essere, al prodotto interno tra gli stati  $|i\rangle$  ed  $|f\rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle f | i \rangle & = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\infty r^2 dr \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{a_0}\right)^{3/2} e^{-2r/a_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} e^{-r/a_0} \\ & = \frac{16\sqrt{2}}{27} = 0.838052\dots \end{aligned}$$

3. Nel limite  $V_0 \rightarrow \infty$ , abbiamo

$$\cot \delta_0 = -\cot(kr_0) ,$$

da cui segue che la sezione d'urto vale

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 = \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{1 + \cot^2 \delta_0} = \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{1 + \cot^2 kr_0} = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2(kr_0) \simeq 4\pi r_0^2 ,$$

come per la sfera impenetrabile. Il risultato non è sorprendente, in quanto il limite  $V_0 \rightarrow \infty$  corrisponde al caso di una sfera dalla superficie infinitamente rigida.

La formula

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{1 + \cot^2 \delta_0}$$

evidenzia come per i valori di  $k$  per i quali  $\cot \delta_0 = 0$  la sezione d'urto prende valore massimo. Questa condizione è definita "risonanza", per analogia con i sistemi oscillanti nei quali, per una opportuna frequenza di forza di eccitazione esterna, l'ampiezza di oscillazione raggiunge un massimo.

Nel limite  $V_0 \rightarrow \infty$ , i valori di risonanza sono determinati da

$$\cot \delta_0 = -\cot(kr_0) = 0 , \quad kr_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

Per  $V_0$  finito, la condizione di risonanza diventa

$$\cot \delta_0 = -\cot(kr_0) - \frac{\hbar^2 k}{2mV_0 r_0} \frac{1}{\sin^2(kr_0)} = 0 , \quad \longrightarrow \quad -\cos(kr_0) - \frac{\hbar^2 k}{2mV_0 r_0} \frac{1}{\sin(kr_0)} = 0 .$$

Per trovare il valore più piccolo di  $k$  che risolve questa equazione, cerchiamone la soluzione nella forma  $kr_0 = \pi/2 + \Delta$ ; abbiamo

$$-\cos\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\right) - \frac{\hbar^2(\pi/2 + \Delta)}{2mV_0 r_0^2} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\right)} = 0 ,$$

che conduce a

$$\sin \Delta - \frac{\hbar^2(\pi/2 + \Delta)}{2mV_0 r_0^2} \frac{1}{\cos \Delta} = 0 .$$

Per  $V_0$  grande,  $\Delta$  è piccolo e possiamo sviluppare in serie di potenze di  $\Delta$ ; al I ordine in  $\Delta$  abbiamo

$$\Delta - \frac{\hbar^2(\pi/2 + \Delta)}{2mV_0r_0^2} = 0, \quad \longrightarrow \quad \Delta = \frac{\pi/2}{2mV_0r_0^2/\hbar^2 - 1} \simeq \frac{\pi}{4mV_0r_0^2/\hbar^2},$$

quindi

$$k_{\text{ris}}r_0 \simeq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4mV_0r_0^2/\hbar^2}.$$

## II prova finale, 19 febbraio 2013

1. L'operatore  $V = f(r) xz$  è un operatore *pari* e può essere scritto come combinazione di tensori sferici di rango due,

$$V = T_{-1}^{(2)} - T_1^{(2)} .$$

Il rapporto  $R_1$  è banalmente nullo, perché il numeratore si annulla in virtù della regola di  $m$ -selezione, mentre il denominatore è diverso da zero.

Il rapporto  $R_2$  è calcolabile senza conoscere  $f(r)$ ; infatti

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{\langle 3, 2, -1 | V | 3, 2, 0 \rangle}{\langle 3, 2, 2 | V | 3, 2, 1 \rangle} = \frac{\langle 3, 2, -1 | T_{-1}^{(2)} | 3, 2, 0 \rangle}{-\langle 3, 2, 2 | T_1^{(2)} | 3, 2, 1 \rangle} = - \frac{\left( \langle 2, -1 | \langle 2, 0 | \right) | 2, -1 \rangle \cdot \langle 3, 2 | T^{(2)} | 3, 2 \rangle}{\left( \langle 2, 1 | \langle 2, 1 | \right) | 2, 2 \rangle \cdot \langle 3, 2 | T^{(2)} | 3, 2 \rangle} \\ &= - \frac{-\sqrt{1/14}}{-\sqrt{3/7}} = -\sqrt{\frac{1}{6}} . \end{aligned}$$

2. (i) Il potenziale di perturbazione è dato da

$$V(t) = -eE_z z = -\frac{e\lambda z}{A^2 + B^2 t^2} .$$

(ii) Al I ordine in teoria delle perturbazioni, l'ampiezza di probabilità di transizione dallo stato iniziale  $|1, 0, 0\rangle$  ad un generico stato  $|n, l, m\rangle$  a  $t = \infty$  è data da

$$c_{(1,0,0) \rightarrow (n,l,m)}^{(1)} = \delta_{n1} \delta_{l0} \delta_{m0} + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle n, l, m | V(t) | 1, 0, 0 \rangle e^{i\omega_{n1}t} , \quad \omega_{n1} = \frac{E_n - E_1}{\hbar} .$$

Oltre allo stesso stato  $|1, 0, 0\rangle$ , gli stati  $|n, l, m\rangle$  in cui il sistema può trovarsi sono quelli per i quali l'elemento di matrice

$$\langle n, l, m | V(t) | 1, 0, 0 \rangle = -\frac{e\lambda}{A^2 + B^2 t^2} \langle n, l, m | z | 1, 0, 0 \rangle$$

è diverso da zero. Poiché l'operatore  $z$  può essere pensato come la componente zero di un tensore sferico di rango 1 e lo stato iniziale ha momento angolare nullo, deve essere necessariamente  $l = 1$  ed  $m = 0$ , per un qualunque  $n > 1$ .

(iii) Tra gli stati con  $n = 2$ , l'unico accessibile è pertanto lo stato  $|2, 1, 0\rangle$ , per il quale l'ampiezza di transizione al I ordine vale

$$\begin{aligned} c_{(1,0,0) \rightarrow (2,1,0)}^{(1)} &= \frac{e\lambda}{i\hbar} \langle 2, 1, 0 | z | 1, 0, 0 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{A^2 + B^2 t^2} e^{i\omega_{21}t} \\ &= \frac{e\lambda}{i\hbar} \int_0^{2\pi} d\phi Y_0^0 \int_0^\pi \sin\theta d\theta Y_1^0(\theta) \int_0^\infty r^2 dr R_{21}(r) R_{10}(r) r \cos(\theta) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{A^2 + B^2 t^2} e^{i\omega_{21}t} = -\frac{e\lambda}{i\hbar} \frac{32}{81} \sqrt{\frac{2}{3}} a \frac{\pi e^{-\omega_{21}|A/B|}}{|AB|} , \end{aligned}$$

dove  $a$  è il raggio di Bohr.

3. Osserviamo che

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \left( \text{Re} f(\theta) \right)^2 + \left( \text{Im} f(\theta) \right)^2 \geq \left( \text{Im} f(\theta) \right)^2 ,$$

quindi

$$\frac{d\sigma(\theta = 0)}{d\Omega} \geq \left( \operatorname{Im} f(0) \right)^2 = \left[ \frac{k}{4\pi} \sigma \right]^2 ,$$

dove nell'ultimo passaggio è stato usato il teorema ottico. Da qui la disuguaglianza desiderata discende banalmente.

Per ottenerne una verifica esplicita, si osservi che

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(\theta = 0)}{d\Omega} = |f(0)|^2 &= \left| \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l \right|^2 \\ &= \left( \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \cos \delta_l \sin \delta_l \right)^2 + \left( \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \right)^2 \\ &\geq \left( \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \right)^2 = \frac{k^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \right)^2 \\ &= \frac{k^2}{(4\pi)^2} \sigma^2 . \end{aligned}$$



## I prova di recupero, 3 luglio 2013

1. L'operatore  $V = f(r) yz$  è un operatore *pari* e può essere scritto come combinazione di tensori sferici di rango due,

$$V = T_{-1}^{(2)} + T_1^{(2)} .$$

Il rapporto  $R_1$  è banalmente nullo, perché al numeratore contiene l'elemento di matrice di un operatore pari tra stati con funzioni d'onda una pari e l'altra dispari. Il rapporto  $R_3$  non può essere calcolato senza conoscere la funzione  $f(r)$ , perché gli elementi di matrice al numeratore e al denominatore possono essere scritti, attraverso il teorema di Wigner-Eckart, in termini di elementi di matrice ridotti *diversi*. Il rapporto  $R_2$  è calcolabile senza conoscere  $f(r)$ ; infatti

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{\langle 3, 2, -1 | V | 3, 2, 0 \rangle}{\langle 3, 2, 2 | V | 3, 2, 1 \rangle} = \frac{\langle 3, 2, -1 | T_{-1}^{(2)} | 3, 2, 0 \rangle}{\langle 3, 2, 2 | T_{+1}^{(2)} | 3, 2, 1 \rangle} = \frac{\left( \langle 2, -1 | \langle 2, 0 | \right) | 2, -1 \rangle \cdot \langle 3, 2 | T^{(2)} | 3, 2 \rangle}{\left( \langle 2, 1 | \langle 2, 1 | \right) | 2, 2 \rangle \cdot \langle 3, 2 | T^{(2)} | 3, 2 \rangle} \\ &= \frac{-\sqrt{1/14}}{-\sqrt{3/7}} = \frac{1}{\sqrt{6}} . \end{aligned}$$

2. Gli autostati dell'Hamiltoniana imperturbata e i relativi autovalori sono dati da

$$|n_x, n_y, n_z\rangle , \quad E_{n_x n_y n_z} = \hbar\omega \left( n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) , \quad n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots$$

Il potenziale di perturbazione è dato da

$$V(t) = -qE(t)z = \begin{cases} 0 , & t < 0 , \\ -qzE_0 \cos(\Omega t)e^{-t/\tau} , & t \geq 0 . \end{cases}$$

Al I ordine in teoria delle perturbazioni, l'ampiezza di probabilità di transizione dallo stato iniziale  $|0, 0, 0\rangle$  ad un generico stato  $|n_x, n_y, n_z\rangle$  a  $t = \infty$  è data da

$$\begin{aligned} c_{(0,0,0) \rightarrow (n_x, n_y, n_z)}^{(1)} &= \delta_{n_x 0} \delta_{n_y 0} \delta_{n_z 0} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^\infty dt \langle n_x, n_y, n_z | V(t) | 0, 0, 0 \rangle e^{i\omega_{fi} t} , \\ \omega_{fi} &= \frac{E_{n_x n_y n_z} - E_{000}}{\hbar} . \end{aligned}$$

Oltre allo stesso stato  $|0, 0, 0\rangle$ , gli stati  $|n_x, n_y, n_z\rangle$  in cui il sistema può trovarsi sono quelli per i quali l'elemento di matrice

$$\langle n_x, n_y, n_z | V(t) | 0, 0, 0 \rangle = -qE_0 \cos(\Omega t) e^{-t/\tau} \langle n_x, n_y, n_z | z | 0, 0, 0 \rangle$$

è diverso da zero, cioè il solo stato  $|0, 0, 1\rangle$ . Infatti, scrivendo l'operatore  $z$  come combinazione lineare degli operatori di salita e di discesa per la componente  $z$  dell'Hamiltoniana imperturbata  $H_0$ ,

$$z = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a_z + a_z^\dagger) ,$$

si ottiene facilmente che

$$\langle n_x, n_y, n_z | z | 0, 0, 0 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \delta_{n_x 0} \delta_{n_y 0} \delta_{n_z 1} .$$

Pertanto, l'ampiezza di transizione al I ordine vale

$$\begin{aligned} c_{(0,0,0) \rightarrow (0,0,1)}^{(1)} &= \frac{qE_0}{i\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_0^\infty dt \cos(\Omega t) e^{-t/\tau} e^{i\omega t} \\ &= \frac{eE_0}{i\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{\tau(-1 + i\omega\tau)}{[i + \tau(\omega - \Omega)][i + \tau(\omega + \Omega)]}, \end{aligned}$$

mentre la probabilità è data da

$$|c_{(0,0,0) \rightarrow (0,0,1)}^{(1)}|^2 = \frac{q^2 E_0^2}{2m\omega\hbar} \frac{\tau^2 [1 + (\omega\tau)^2]}{[1 + \tau^2(\omega - \Omega)^2][1 + \tau^2(\omega + \Omega)^2]}.$$

3. (i) La sezione d'urto totale elastica nel canale  $l$  è data da

$$\sigma_{\text{el}}^{(l)} = \int d\Omega |f_{\text{el}}^{(l)}(\theta)|^2 = 2\pi \int_0^\pi d(\cos\theta) (2l+1)^2 \frac{|\eta_l e^{2i\delta_l} - 1|^2}{4k^2} P_l^2(\cos\theta) = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) |\eta_l e^{2i\delta_l} - 1|^2,$$

dove si è usata la nota proprietà

$$\int_0^\pi d(\cos\theta) P_l^2(\cos\theta) = \frac{2}{2l+1}.$$

(ii) La sezione d'urto totale nel canale  $l$  è accessibile attraverso il teorema ottico,

$$\sigma_{\text{tot}}^{(l)} = \frac{4\pi}{k} (2l+1) \text{Im} f_{\text{el}}(\theta=0) = \frac{2\pi}{k^2} (2l+1) (1 - \eta_l \cos(2\delta_l)),$$

dove si è usato  $P_l(1) = 1$ .

(iii) La sezione d'urto totale inelastica nel canale  $l$  è ricavabile per differenza,

$$\sigma_{\text{inel}}^{(l)} = \sigma_{\text{tot}}^{(l)} - \sigma_{\text{el}}^{(l)} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) (1 - \eta_l^2).$$

(iv) Il rapporto tra sezione d'urto elastica e sezione d'urto inelastica nel canale  $l$  vale

$$\frac{\sigma_{\text{el}}^{(l)}}{\sigma_{\text{inel}}^{(l)}} = \frac{|\eta_l e^{2i\delta_l} - 1|^2}{1 - \eta_l^2}.$$

Poiché  $(1 - \eta_l)^2 \leq |1 - \eta_l e^{2i\delta_l}|^2 \leq (1 + \eta_l)^2$ , abbiamo che

$$\frac{(1 - \eta_l)^2}{1 - \eta_l^2} \leq \frac{\sigma_{\text{el}}^{(l)}}{\sigma_{\text{inel}}^{(l)}} \leq \frac{(1 + \eta_l)^2}{1 - \eta_l^2},$$

o, equivalentemente,

$$\frac{1 - \eta_l}{1 + \eta_l} \sigma_{\text{inel}}^{(l)} \leq \sigma_{\text{el}}^{(l)} \leq \frac{1 + \eta_l}{1 - \eta_l} \sigma_{\text{inel}}^{(l)}.$$

## II prova di recupero, 3 settembre 2013

1. L'operatore  $V = f(r) (x^2 - y^2)$  è un operatore *pari* e può essere scritto come combinazione di tensori sferici di rango due,

$$V = T_{-2}^{(2)} + T_2^{(2)} .$$

Il rapporto  $R_1$  è banalmente nullo, perché al numeratore contiene l'elemento di matrice di un operatore pari tra stati con funzioni d'onda una pari e l'altra dispari. Il rapporto  $R_2$  non può essere calcolato senza conoscere la funzione  $f(r)$ , perché gli elementi di matrice al numeratore e al denominatore possono essere scritti, attraverso il teorema di Wigner-Eckart, in termini di elementi di matrice ridotti *diversi*. Il rapporto  $R_3$  è calcolabile senza conoscere  $f(r)$ ; infatti

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{\langle 4, 3, -1 | V | 4, 1, 1 \rangle}{\langle 4, 3, 2 | V | 4, 1, 0 \rangle} = \frac{\langle 4, 3, -1 | T_{-2}^{(2)} | 4, 1, 1 \rangle}{\langle 4, 3, 2 | T_{+2}^{(2)} | 4, 1, 0 \rangle} = \frac{\left( \langle 2, -2 | \langle 1, 1 | \right) | 3, -1 \rangle \cdot \langle 4, 3 | T^{(2)} | 4, 1 \rangle}{\left( \langle 2, 2 | \langle 1, 0 | \right) | 3, 2 \rangle \cdot \langle 4, 3 | T^{(2)} | 4, 1 \rangle} \\ &= \frac{\sqrt{1/15}}{\sqrt{1/3}} = \frac{1}{\sqrt{5}} . \end{aligned}$$

2. Detti  $x = 0$  ed  $x = a = 10^{-8}$  cm gli estremi della scatola, il potenziale perturbante è dato da

$$V(x, t) = \theta(t)\theta(\tau - t) \mathcal{V}(x) \equiv \theta(t)\theta(\tau - t) \begin{cases} V_0 , & \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} + \frac{b}{2} , \\ 0 , & \text{altrove} , \end{cases}$$

dove  $\tau = 5 \times 10^{-18}$  s,  $V_0 = -10^4$  eV,  $b = 10^{-12}$  cm  $\ll a$  e le  $\theta$  davanti a tutto esprimono il fatto che la perturbazione è attiva solo nell'intervallo di tempo  $0 \leq t \leq \tau$ . Si osservi che  $\mathcal{V}(x)$  è funzione *simmetrica* intorno a  $x = a/2$ .

Al I ordine perturbativo, l'ampiezza di probabilità che, dopo la scomparsa del potenziale perturbante, un elettrone inizialmente nello stato  $n = 1$  si trovi in un generico stato  $n$  è data da

$$c_{1 \rightarrow n}^{(1)} = \delta_{1n} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^\tau dt \langle n | \mathcal{V} | 1 \rangle e^{i\omega_{n1}t} ,$$

dove  $\omega_{n1} = \frac{E_n - E_1}{\hbar}$ . Ora, ricordando che gli autostati dell'Hamiltoniana imperturbata hanno parità definita per riflessioni intorno all'asse  $x = a/2$  e che  $\mathcal{V}(x)$  è pari rispetto a tali riflessioni, gli elementi di matrice non nulli sono quelli per cui  $n$  è dispari (cioè lo stato  $|n\rangle$  deve avere la stessa simmetria dello stato  $|1\rangle$ ). Ciò ci consente di concludere subito che  $c_{1 \rightarrow 2}^{(1)} = c_{1 \rightarrow 4}^{(1)} = 0$  e ci resta da calcolare solo  $c_{1 \rightarrow 3}^{(1)}$ . Per farlo, calcoliamo prima

$$\begin{aligned} \langle 3 | \mathcal{V} | 1 \rangle &= \int_{a/2-b/2}^{a/2+b/2} dx V_0 \psi_3(x) \psi_1(x) = \frac{2}{a} V_0 \int_{a/2-b/2}^{a/2+b/2} dx \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \\ &\simeq \frac{2}{a} V_0 b \sin\left(\frac{3\pi}{2a}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2a}\right) = -\frac{2}{a} V_0 b = 2 \text{ eV} , \end{aligned}$$

dove l'approssimazione deriva dal fatto che, essendo  $b \ll a$ , è ragionevole approssimare l'integrale con il prodotto tra l'estensione del dominio di integrazione e il valore dell'integranda in  $x = a/2$ .

Abbiamo dunque che

$$c_{1 \rightarrow 3}^{(1)} = \frac{1}{i\hbar} \frac{e^{i\omega_{31}\tau} - 1}{i\omega_{31}} 2 \text{ eV}$$

e che la probabilità di transizione è data da

$$|c_{1 \rightarrow 3}^{(1)}|^2 = \frac{1}{(\hbar\omega_{31})^2} \sin\left(\frac{\omega_{31}}{2}\tau\right) 16 \text{ eV}^2 = 1.45 \times 10^{-4} .$$

3. (a) In approssimazione di Born, al prim'ordine, l'ampiezza di diffusione per un potenziale con simmetria sferica è data da (Sakurai, (7.2.2)-(7.2.4))

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3x e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} V(\vec{x}) = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{q} \int_0^\infty rV(r) \sin(qr) dr ,$$

dove  $q \equiv |\vec{k} - \vec{k}'| = 2k \sin \frac{\theta}{2}$ .

Nel caso in esame, abbiamo

$$f(\theta) = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \frac{1}{q} \int_0^a r \sin(qr) dr = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \frac{\sin(qa) - qa \cos(qa)}{q^3}$$

e

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 .$$

(b) Poiché

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto (\sin x - x \cos x)^2 , \quad x \equiv qa = 2ka \sin(\theta/2) ,$$

il suo primo zero si presenta per  $x = \tan x$  e vale circa  $x^* = 1.43\pi$ , da cui discende che

$$a = \frac{1.43\pi}{2k \sin(\theta^*/2)} ,$$

dove  $\theta^*$  è l'angolo più piccolo per cui  $d\sigma/d\Omega$  si annulla. Quindi basta trovare sperimentalmente l'angolo più piccolo per cui la sezione d'urto differenziale si annulla, per ricavare da questa informazione il raggio di azione del potenziale.

(c) Affinché la procedura descritta al punto precedente abbia senso, deve valere  $\sin(\theta^*/2) \leq 1$ , che implica

$$\frac{1.43\pi}{2ka} \leq 1 \quad \longrightarrow \quad k \geq \frac{1.43\pi}{2a} \quad \longrightarrow \quad E \geq \left(\frac{1.43\pi}{2a}\right)^2 \frac{\hbar^2}{2m} = 4.2 \text{ MeV} .$$

## I prova finale, 4 febbraio 2014

1. Dalle espressioni per i tensori sferici  $U^{(1)}$  e  $V^{(1)}$  possiamo ricavare che

$$U_x = \frac{U_{-1} - U_1}{\sqrt{2}}, \quad U_y = \frac{U_{-1} + U_1}{\sqrt{2}}, \quad U_z = U_0,$$

e

$$V_x = \frac{V_{-1} - V_1}{\sqrt{2}}, \quad V_y = \frac{V_{-1} + V_1}{\sqrt{2}}, \quad V_z = V_0,$$

dove, per semplicità di scrittura, è stato omissso l'apice (1). Il nuovo tensore sferico può essere definito nel modo seguente:

$$\begin{aligned} T_{\pm 1}^{(1)} &= \mp \frac{(\vec{U} \times \vec{V})_x \pm i(\vec{U} \times \vec{V})_y}{\sqrt{2}} = \mp i(U_{\pm 1}V_0 - U_0V_{\pm 1}), \\ T_0^{(1)} &= (\vec{U} \times \vec{V})_z = i(U_{-1}V_1 - U_1V_{-1}). \end{aligned}$$

Verifichiamo le proprietà definenti, utilizzando il fatto che le componenti di  $U^{(1)}$  e di  $V^{(1)}$  le soddisfano, essendo le componenti di tensori sferici:

$$\begin{aligned} [J_z, T_0] &= [J_z, i(U_{-1}V_1 - U_1V_{-1})] \\ &= i\left(U_{-1}[J_z, V_1] + [J_z, U_{-1}]V_1 - U_1[J_z, V_{-1}] - [J_z, U_1]V_{-1}\right) \\ &= i\hbar\left(U_{-1}V_1 - U_{-1}V_1 + U_1V_{-1} - U_1V_{-1}\right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [J_z, T_{\pm 1}] &= [J_z, \mp i(U_{\pm 1}V_0 - U_0V_{\pm 1})] = \mp i\left([J_z, U_{\pm 1}]V_0 - U_0[J_z, V_{\pm 1}]\right) \\ &= \mp i\hbar(\pm U_{\pm 1}V_0 \mp U_0V_{\pm 1}) = \pm \hbar\left(\mp i(U_{\pm 1}V_0 - U_0V_{\pm 1})\right) = \pm \hbar T_{\pm 1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [J_+, T_0] &= [J_+, i(U_{-1}V_1 - U_1V_{-1})] \\ &= i\left(U_{-1}[J_+, V_1] + [J_+, U_{-1}]V_1 - U_1[J_+, V_{-1}] - [J_+, U_1]V_{-1}\right) \\ &= i\hbar\sqrt{2}(U_0V_1 - U_1V_0) = \hbar\sqrt{2}T_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [J_+, T_{\pm 1}] &= [J_+, \mp i(U_{\pm 1}V_0 - U_0V_{\pm 1})] \\ &= \mp i\left(U_{\pm 1}[J_+, V_0] + [J_+, U_{\pm 1}]V_0 - U_0[J_+, V_{\pm 1}] - [J_+, U_0]V_{\pm 1}\right) \\ &= \mp i\hbar\sqrt{2}(U_{\pm 1}V_1 - U_1V_{\pm 1}) = \begin{cases} 0 \\ \hbar\sqrt{2}T_0. \end{cases} \end{aligned}$$

I commutatori con  $J_-$  si ottengono analogamente.

2. Al I ordine in teoria delle perturbazioni, l'ampiezza di probabilità di transizione dallo stato iniziale  $|1, 0, 0\rangle$  ad un generico stato  $|n, l, m\rangle$  a  $t = \infty$  è data da

$$c_{(1,0,0) \rightarrow (n,l,m)}^{(1)} = \delta_{n1}\delta_{l0}\delta_{m0} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^\infty dt \langle n, l, m | V(t) | 1, 0, 0 \rangle e^{i\omega_{n1}t}, \quad \omega_{n1} = \frac{E_n - E_1}{\hbar},$$

dove con  $|n, l, m\rangle$  ed  $E_n$  sono stati indicati rispettivamente gli autostati dell'Hamiltoniana imperturbata di un atomo di idrogeno e i relativi autovalori.

Il potenziale  $V$  è proporzionale a  $xy$ , quindi può essere scritto in termini di componenti di un tensore sferico di rango 2, secondo la combinazione  $T_2^{(2)} - T_{-2}^{(2)}$ . In virtù del teorema di Wigner-Eckart, l'elemento di matrice  $\langle n, l, m | V(t) | 1, 0, 0 \rangle$  è non nullo per tutti gli stati finali del tipo  $|n \geq 3, 2, \pm 2\rangle$ .

Preso il valore minimo possibile per  $n$ , cioè  $n = 3$ , abbiamo

$$c_{(1,0,0) \rightarrow (3,2,\pm 2)}^{(1)} = \frac{A}{i\hbar} \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} e^{i\omega_{31}t} \langle 3, 2, \pm 2 | xy | 1, 0, 0 \rangle = \frac{A}{i\hbar(\alpha - i\omega_{31})} \langle 3, 2, \pm 2 | xy | 1, 0, 0 \rangle ,$$

con

$$\begin{aligned} \langle 3, 2, \pm 2 | xy | 1, 0, 0 \rangle &= \int d\Omega \int_0^\infty r^2 dr R_{32}(r) [Y_{\pm 2}^2(\theta, \phi)]^* r^2 \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi R_{10}(r) Y_0^0(\theta, \phi) \\ &= \int_0^\infty dr r^4 R_{32}(r) R_{10}(r) \int d\Omega \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{\mp 2i\phi} \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\ &= \mp \frac{3\pi i}{128} \sqrt{\frac{15}{2}} \int_0^\infty dr r^4 R_{32}(r) R_{10}(r) . \end{aligned}$$

3. (i) L'ampiezza di diffusione in approssimazione di Born è data da (Sakurai, (7.2.2)-(7.2.4))

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) = -\frac{me^2}{2\pi\hbar^2} \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \left( -\frac{1}{|\vec{r} + \vec{a}|} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} \right) \\ &= -\frac{me^2}{2\pi\hbar^2} \int d^3r \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{r} (-e^{-i\vec{q}\cdot\vec{a}} + e^{i\vec{q}\cdot\vec{a}}) = -\frac{me^2}{2\pi\hbar^2} \frac{4\pi}{q^2} 2i \sin(\vec{q} \cdot \vec{a}) , \end{aligned}$$

dove  $\vec{q} \equiv \vec{k} - \vec{k}'$ .

Prendendo  $\vec{k} = (0, 0, k)$  e  $\vec{a} = (a, 0, 0)$ , si ha  $\vec{k}' = (k \sin \theta, 0, k \cos \theta)$ ,  $q^2 = 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$  e  $\vec{q} \cdot \vec{a} = -ka \sin \theta$ . Da questi risultati discende che

$$|f(\theta)|^2 = \frac{m^2 e^4}{(\hbar k)^4} \frac{\sin^2(ka \sin \theta)}{\sin^4(\theta/2)} .$$

(ii) La sezione d'urto presenta un picco in  $\theta = 0$ . Per i massimi secondari, si rimanda ad una analisi numerica.

## I prova di recupero, 22 luglio 2014

1. Denominiamo innanzitutto gli operatori dati nel modo seguente:

$$T_{\pm 2}^{(2)} \equiv U_{\pm 1}V_{\pm 1}, \quad T_{\pm 1}^{(2)} \equiv \frac{U_{\pm 1}V_0 + U_0V_{\pm 1}}{\sqrt{2}}, \quad T_0^{(2)} \equiv \frac{U_1V_{-1} + 2U_0V_0 + U_{-1}V_1}{\sqrt{6}}.$$

Ora verifichiamo che effettivamente questi operatori soddisfano le relazioni di commutazione che definiscono un tensore sferico di rango 2, cioè le relazioni di commutazione date nel testo del problema, con  $k = 2$ , assumendo che gli operatori  $U^{(1)}$  e  $V^{(1)}$  siano tensori sferici di rango 1, cioè soddisfino le stesse relazioni di commutazione, ma con  $k = 1$ .

Partiamo dall'operatore  $T_{+2}^{(2)} \equiv U_{+1}V_{+1}$  e calcoliamone i commutatori con  $J_z$  e con  $J_{\pm}$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} [J_z, T_{+2}^{(2)}] &\equiv [J_z, U_{+1}V_{+1}] = U_{+1}[J_z, V_{+1}] + [J_z, U_{+1}]V_{+1} = U_{+1}(+\hbar V_{+1}) + (+\hbar U_{+1})V_{+1} \\ &= +2\hbar U_{+1}V_{+1}, \\ [J_+, T_{+2}^{(2)}] &\equiv [J_+, U_{+1}V_{+1}] = U_{+1}[J_+, V_{+1}] + [J_+, U_{+1}]V_{+1} = U_{+1} \cdot 0 + 0 \cdot V_{+1} = 0, \\ [J_-, T_{+2}^{(2)}] &\equiv [J_-, U_{+1}V_{+1}] = U_{+1}[J_-, V_{+1}] + [J_-, U_{+1}]V_{+1} = U_{+1}(\hbar\sqrt{2}V_0) + (\hbar\sqrt{2}U_0)V_{+1} \\ &= 2\hbar \frac{U_{+1}V_0 + U_0V_{+1}}{\sqrt{2}} \equiv 2\hbar T_{+1}^{(2)}, \end{aligned}$$

dove è stato usato il fatto che  $U^{(1)}$  e  $V^{(1)}$ , essendo tensori sferici di rango 1, soddisfano le regole di commutazione definiti, date nel testo del problema, con  $k = 1$ . Si vede chiaramente che l'operatore  $U_{+1}V_{+1}$  soddisfa le regole di commutazione date nel testo del problema, con  $k = 2$  e  $q = 2$ . In modo analogo si può procedere per gli altri operatori.

2. Al I ordine in teoria delle perturbazioni, l'ampiezza di probabilità di transizione dallo stato iniziale  $|1, 0, 0\rangle$  ad un generico stato  $|n, l, m\rangle$  a  $t = \infty$  è data da

$$c_{(1,0,0) \rightarrow (n,l,m)}^{(1)} = \delta_{n1}\delta_{l0}\delta_{m0} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^\infty dt \langle n, l, m | V(t) | 1, 0, 0 \rangle e^{i\omega_{n1}t}, \quad \omega_{n1} = \frac{E_n - E_1}{\hbar},$$

dove con  $|n, l, m\rangle$  ed  $E_n$  sono stati indicati rispettivamente gli autostati dell'Hamiltoniana imperturbata di un atomo di idrogeno e i relativi autovalori.

Il potenziale  $V$  è proporzionale a  $xz$ , quindi può essere scritto in termini di componenti di un tensore sferico di rango 2, secondo la combinazione  $T_1^{(2)} - T_{-1}^{(2)}$ . In virtù del teorema di Wigner-Eckart, l'elemento di matrice  $\langle n, l, m | V(t) | 1, 0, 0 \rangle$  è non nullo per tutti gli stati finali del tipo  $|n \geq 3, 2, \pm 1\rangle$ .

Preso il valore minimo possibile per  $n$ , cioè  $n = 3$ , abbiamo

$$c_{(1,0,0) \rightarrow (3,2,\pm 1)}^{(1)} = \frac{A}{i\hbar} \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} e^{i\omega_{31}t} \langle 3, 2, \pm 1 | xz | 1, 0, 0 \rangle = \frac{A}{i\hbar(\alpha - i\omega_{31})} \langle 3, 2, \pm 1 | xz | 1, 0, 0 \rangle,$$

con

$$\begin{aligned} \langle 3, 2, \pm 1 | xz | 1, 0, 0 \rangle &= \int d\Omega \int_0^\infty r^2 dr R_{32}(r) [Y_{\pm 1}^2(\theta, \phi)]^* r^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi R_{10}(r) Y_0^0(\theta, \phi) \\ &= \int_0^\infty dr r^4 R_{32}(r) R_{10}(r) \int d\Omega(\mp) \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\mp i\phi} \\ &\times \sin \theta \cos \theta \cos \phi \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\ &= \mp \frac{1}{\sqrt{30}} \int_0^\infty dr r^4 R_{32}(r) R_{10}(r). \end{aligned}$$

3. In approssimazione di Born, la sezione d'urto differenziale è data da

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2 Q^2}{4\pi^2 \hbar^4} \left| \int U(r) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3r \right|^2 ,$$

dove  $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$ , con  $\vec{k}$  e  $\vec{k}'$  i vettori d'onda dell'onda incidente e diffusa, rispettivamente. Chiamando  $\theta$  l'angolo tra questi due vettori e ricordando che il loro modulo è uguale, si ottiene facilmente che  $q^2 = 4k^2 \sin^2 \theta/2$ . Nell'espressione di sopra,  $U(r)$  è il potenziale elettrostatico, che soddisfa l'equazione di Poisson (unità cgs),  $\nabla^2 U = -4\pi\rho$ .

Detta

$$F(q) = \int \rho(r) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3r$$

la trasformata di Fourier di  $\rho(r)$ , se si prende la trasformata del I e del II membro dell'equazione di Poisson, si ottiene

$$-q^2 \int U(r) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3r = -4\pi F(q) ,$$

dove è stata effettuata due volte l'integrazione per parti nel I membro e si è usato il fatto che il potenziale  $U(r)$  si annulla all'infinito.

La sezione d'urto differenziale può dunque essere scritta nella forma seguente:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2 Q^2 (4\pi)^2}{4\pi^2 \hbar^4 q^4} |F(q)|^2 = \frac{4m^2 Q^2}{\hbar^4 q^4} |F(q)|^2 .$$

A piccoli angoli,  $\theta$  piccolo e  $q$  piccolo, possiamo effettuare la seguente approssimazione:

$$\begin{aligned} F(q) &= \int \rho(r) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3r = \int \rho(r) \left[ 1 + i\vec{q}\cdot\vec{r} + \frac{1}{2}(i\vec{q}\cdot\vec{r})^2 + \dots \right] d^3r \\ &= \int \rho(r) d^3r - \frac{1}{2} \int \rho(r) (\vec{q}\cdot\vec{r})^2 d^3r + \dots \simeq -\frac{Aq^2}{6} , \end{aligned}$$

dove si è usato che la carica totale che genera il potenziale è nulla, cioè  $\int \rho(r) d\vec{r} = 0$ , che l'integrale lineare in  $\vec{r}$  è nullo per parità e che

$$\int \rho(r) (\vec{q}\cdot\vec{r})^2 d^3r = q^2 \int \rho(r) r^2 \cos^2 \theta d^3r = \frac{q^2}{3} \int \rho(r) r^2 d^3r = \frac{Aq^2}{3} .$$

In definitiva,

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\theta \rightarrow 0} \simeq \frac{A^2 m^2 Q^2}{9\hbar^4} .$$



## II prova di recupero, 2 settembre 2014

1. L'applicazione del secondo commutatore nel caso con  $J_-$  non è possibile, poiché non è data l'espressione della componente  $q = 2$  del tensore sferico. Conviene ricorrere al teorema di costruzione di tensori sferici (Sakurai, (3.10.27)) e applicarlo al caso in questione. Abbiamo

$$T_3^{(3)} = \langle 2, 1; 2, 1 | 3, 3 \rangle U_2^{(2)} V_1^{(1)} = U_2^{(2)} V_1^{(1)} .$$

2. Al I ordine in teoria delle perturbazioni, l'ampiezza di probabilità di transizione dallo stato iniziale  $|1, 0, 0\rangle$  ad un generico stato  $|n, l, m\rangle$  a  $t = \infty$  è data da

$$c_{(1,0,0) \rightarrow (n,l,m)}^{(1)} = \delta_{n1} \delta_{l0} \delta_{m0} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^\infty dt \langle n, l, m | V(t) | 1, 0, 0 \rangle e^{i\omega_{n1}t}, \quad \omega_{n1} = \frac{E_n - E_1}{\hbar},$$

dove con  $|n, l, m\rangle$  ed  $E_n$  sono stati indicati rispettivamente gli autostati dell'Hamiltoniana imperturbata di un atomo di idrogeno e i relativi autovalori.

Il potenziale  $V$  è proporzionale a  $x$ , quindi può essere scritto in termini di componenti di un tensore sferico di rango 1, secondo la combinazione  $T_1^{(1)} - T_{-1}^{(1)}$ . In virtù del teorema di Wigner-Eckart, l'elemento di matrice  $\langle n, l, m | V(t) | 1, 0, 0 \rangle$  è non nullo per tutti gli stati finali del tipo  $|n \geq 2, 1, \pm 1\rangle$ .

Preso il valore minimo possibile per  $n$ , cioè  $n = 2$ , abbiamo

$$c_{(1,0,0) \rightarrow (2,1,\pm 1)}^{(1)} = \frac{A}{i\hbar} \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} e^{i\omega_{21}t} \langle 2, 1, \pm 1 | x | 1, 0, 0 \rangle = \frac{A}{i\hbar(\alpha - i\omega_{21})} \langle 2, 1, \pm 1 | x | 1, 0, 0 \rangle,$$

con

$$\begin{aligned} \langle 2, 1, \pm 1 | x | 1, 0, 0 \rangle &= \int d\Omega \int_0^\infty r^2 dr R_{21}(r) [Y_{\pm 1}^1(\theta, \phi)]^* r \sin \theta \cos \phi R_{10}(r) Y_0^0(\theta, \phi) \\ &= \int_0^\infty dr r^3 R_{21}(r) R_{10}(r) \int d\Omega(\mp) \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\mp i\phi} \sin \theta \cos \phi \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\ &= \mp \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^\infty dr r^3 R_{21}(r) R_{10}(r). \end{aligned}$$

3. In approssimazione di Born, al prim'ordine, l'ampiezza di diffusione per un potenziale con simmetria sferica è data da (Sakurai, (7.2.2)-(7.2.4))

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3x e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} U(\vec{x}) = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{q} \int_0^\infty r U(r) \sin(qr) dr,$$

dove  $q \equiv |\vec{k} - \vec{k}'| = 2k \sin \frac{\theta}{2}$ .

Nel caso in esame, abbiamo

$$f(\theta) = -\frac{2mA}{\hbar^2} \frac{1}{q} \int_0^\infty r \sin(qr) e^{-r^2/a^2} dr = -\frac{mAa^3}{2\hbar^2} \sqrt{\pi} e^{-q^2 a^2/4}$$

e

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{m^2 A^2 a^6}{4\hbar^4} \pi e^{-q^2 a^2/2}.$$

## I prova finale, 2 febbraio 2015

1. The  $xy$  operator is parity-even and can be written as combination of rank-2 spherical tensors (see Problem 2 of July 14, 2004):  $T_{+2}^{(2)} - T_{-2}^{(2)}$ . This implies that the matrix elements  $\langle n', l', m' | xy | n, l, m \rangle$  can be different from zero when

- $m' = m \pm 2$  ( $m$ -selection rule);
- $l'$  is one of the angular momentum values obtained in the composition of the angular momenta  $l$  and 2 (Wigner-Eckart theorem); these values are  $l + 2, l + 1, l, l - 1, l - 2$ , when  $l \geq 2$ ; when  $l = 1$  instead,  $l'$  must take the values 3, 2, 1; finally, when  $l = 0$ , it must necessarily be  $l' = 2$ ;
- since  $xy$  is an even operator, the states  $|n, l, m\rangle$  and  $|n', l', m'\rangle$  must have necessarily the same parity (parity rule), i.e.  $l$  and  $l'$  must be both parity-even or both parity-odd; this reduces the possible values of  $l'$  to  $l + 2, l, l - 2$ , when  $l \geq 2$ , to  $l' = 3$  and 1, when  $l = 1$ , and to  $l' = 2$ , when  $l = 0$ .

2. To first order perturbation theory, the probability amplitude of the transition from the initial state  $|1, 0, 0\rangle$  to a generic state  $|n, l, m\rangle$  at  $t > 0$  is given by

$$c_{(1,0,0) \rightarrow (n,l,m)}^{(1)} = \delta_{n1} \delta_{l0} \delta_{m0} + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\epsilon}^t dt' \langle n, l, m | V(t') | 1, 0, 0 \rangle e^{i\omega_{n1}t'}, \quad \omega_{n1} = \frac{E_n - E_1}{\hbar},$$

where  $|n, l, m\rangle$  and  $E_n$  denote, respectively, eigenstates and eigenvalues of the unperturbed Hamiltonian of a non-relativistic hydrogen atom.

The potential  $V$  is proportional to  $x$ , therefore can be written in terms of components of a rank-1 spherical tensor, as the combination  $T_1^{(1)} - T_{-1}^{(1)}$ . According to the Wigner-Eckart theorem, the matrix element  $\langle n, l, m | V(t) | 1, 0, 0 \rangle$  is non-zero for all final states of the form  $|n \geq 2, 1, \pm 1\rangle$ .

Taken the smallest possible value of  $n$ , i.e.  $n = 2$ , we have

$$c_{(1,0,0) \rightarrow (2,1,\pm 1)}^{(1)} = \frac{A}{i\hbar} \int_{-\epsilon}^t dt' \delta(t') e^{i\omega_{21}t'} \langle 2, 1, \pm 1 | x | 1, 0, 0 \rangle = \frac{A}{i\hbar} \langle 2, 1, \pm 1 | x | 1, 0, 0 \rangle,$$

with

$$\begin{aligned} \langle 2, 1, \pm 1 | x | 1, 0, 0 \rangle &= \int d\Omega \int_0^\infty r^2 dr R_{21}(r) [Y_{\pm 1}^1(\theta, \phi)]^* r \sin \theta \cos \phi R_{10}(r) Y_0^0(\theta, \phi) \\ &= \int_0^\infty dr r^3 R_{21}(r) R_{10}(r) \int d\Omega (\mp) \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\mp i\phi} \sin \theta \cos \phi \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\ &= \mp \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^\infty dr r^3 R_{21}(r) R_{10}(r). \end{aligned}$$

3. (a) For the process under exam, the initial and final states are

$$|i\rangle = |\vec{q}_i\rangle | \dots, n_{\vec{k},\lambda}, \dots \rangle, \quad |f\rangle = |\vec{q}_f\rangle | \dots, n_{\vec{k},\lambda} - 1, \dots \rangle.$$

The transition matrix element reads

$$\begin{aligned} \langle f | H' | i \rangle &= -\frac{e}{m} \langle \vec{q}_f | \langle \dots, n_{\vec{k},\lambda} - 1, \dots | \vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 L^3 \omega_{\vec{k}}}} (a_{\vec{k},\lambda} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + a_{\vec{k},\lambda}^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}) | \vec{q}_i \rangle | \dots, n_{\vec{k},\lambda}, \dots \rangle \\ &= -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 L^3 \omega_{\vec{k}}}} \langle \vec{q}_f | \vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k},\lambda} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} | \vec{q}_i \rangle \sqrt{n_{\vec{k},\lambda}} \\ &= -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{\hbar n_{\vec{k},\lambda}}{2\epsilon_0 L^3 \omega_{\vec{k}}}} \vec{q}_f \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k},\lambda} \int_{L^3} \frac{e^{-i\vec{q}_f \cdot \vec{x}}}{L^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{e^{i\vec{q}_i \cdot \vec{x}}}{L^{3/2}} d^3 x. \end{aligned}$$

(b) The integral in  $\langle f|H'|i\rangle$  yields

$$\int_{L^3} \frac{e^{-i\vec{q}_f \cdot \vec{x}}}{L^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{e^{i\vec{q}_i \cdot \vec{x}}}{L^{3/2}} d^3x = \delta_{\vec{q}_f, \vec{q}_i + \vec{k}},$$

which means the momentum conservation

$$\hbar\vec{q}_f = \hbar\vec{q}_i + \hbar\vec{k}. \quad (1)$$

(c) The energy conservation,  $E_i = E_f$ , which reads

$$\frac{(\hbar\vec{q}_f)^2}{2m} = \hbar\omega_{\vec{k}} + \frac{(\hbar\vec{q}_i)^2}{2m}, \quad (2)$$

is incompatible with the momentum conservation. Indeed, squaring the left and the right hand side of Eq. (1), dividing everything by  $2m$  and comparing with Eq. (2), one gets

$$\frac{(\hbar\vec{k})^2}{2m} + \frac{\hbar^2\vec{k} \cdot \vec{q}_i}{m} = \hbar\omega_{\vec{k}} = \hbar c|\vec{k}|,$$

which is solved either by  $|\vec{k}| = 0$ , which means that the photon does not exist, or by

$$|\vec{k}| = \frac{2mc}{\hbar} - 2|\vec{q}_i| \cos \theta,$$

where  $\theta$  is the angle between  $\vec{k}$  and  $\vec{q}_i$ . This second solution is not acceptable, since it implies that the process would be possible only when the photon has a very specific value of  $\vec{k}$ , given the value of  $\vec{q}_i$ , which is absurd. Moreover, if one would take seriously this solution, the resulting value for  $\vec{q}_f = \vec{k} + \vec{q}_i$  would imply an electron in the final state moving faster than light.

## II prova finale, 18 febbraio 2015

1. The  $xz$  operator is parity-even and can be written as combination of rank-2 spherical tensors (see Problem 1 of February 19, 2013):  $T_{-1}^{(2)} - T_1^{(2)}$ .

The ratio  $R_1$  is trivially zero, since the numerator vanishes due to the parity selection rule ( $|2, 1, 0\rangle$  is odd, while  $|3, 2, 1\rangle$  is even) and the denominator is different from zero.

According to the Wigner-Eckart theorem, the ratio  $R_2$  can be written as follows:

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{\langle 4, 2, 1 | xz | 2, 0, 0 \rangle}{\langle 4, 2, -1 | xz | 2, 0, 0 \rangle} = \frac{\langle 4, 2, 1 | -T_1^{(2)} | 2, 0, 0 \rangle}{\langle 4, 2, -1 | T_{-1}^{(2)} | 2, 0, 0 \rangle} \\ &= \frac{-\left(\langle 2, 1 | \langle 0, 0 | \right) | 2, 1 \rangle \cdot \langle 4, 2 || T^{(2)} || 2, 0 \rangle}{\left(\langle 2, -1 | \langle 0, 0 | \right) | 2, -1 \rangle \cdot \langle 4, 2 || T^{(2)} || 2, 0 \rangle} = -1 . \end{aligned}$$

2. (i) To first order perturbation theory, the probability amplitude of the transition from the initial state  $|0\rangle$  to a generic state  $|n\rangle$  at  $t > 0$  is given by

$$c_{0 \rightarrow n}^{(1)} = \delta_{n0} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \langle n | V(t') | 0 \rangle e^{i\omega_{n0}t'} , \quad \omega_{n0} = \frac{E_n - E_0}{\hbar} = n\omega_0 ,$$

where  $|n\rangle$  and  $E_n$  denote, respectively, eigenstates and eigenvalues of the unperturbed one-dimensional harmonic oscillator.

The potential  $V$  is proportional to  $x$ , which can be written as

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) .$$

This implies that the matrix element  $\langle n | V(t') | 0 \rangle$  is proportional to  $\langle n | (a + a^\dagger) | 0 \rangle$  and is therefore different from zero only for  $n = 1$ . The only excited state to which the transition is possible is the state  $|1\rangle$ .

The first-order probability amplitude is then given by

$$\begin{aligned} c_{0 \rightarrow 1}^{(1)}(t) &= \frac{F_0}{i\hbar} \int_0^t dt' \cos(\omega t') e^{i\omega_0 t'} \langle 1 | x | 0 \rangle = \frac{F_0}{i\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_0^t dt' \cos(\omega t') e^{i\omega_0 t'} \\ &= \frac{F_0}{2i\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[ \frac{e^{i(\omega_0 + \omega)t} - 1}{i(\omega_0 + \omega)} + \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t} - 1}{i(\omega_0 - \omega)} \right] , \end{aligned}$$

valid for  $\omega \neq \omega_0$ , otherwise, we have

$$c_{0 \rightarrow 1}^{(1)}(t) = \frac{F_0}{i\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_0^t dt' \cos(\omega_0 t') e^{i\omega_0 t'} = \frac{F_0}{2i\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[ \frac{e^{i(\omega_0 + \omega)t} - 1}{i(\omega_0 + \omega)} + t \right] .$$

The transition probability is given by  $|c_{0 \rightarrow 1}(t)|^2$ .

(ii) To calculate  $\langle x \rangle$  as a function of time, it is worth recalling that, in the interaction picture, the evolution of the initial state can be written as

$$|\alpha, t\rangle = \sum_{n=0, \infty} c_{0 \rightarrow n}(t) e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle ,$$

where the coefficients  $c_{0 \rightarrow n}(t)$  are given, in perturbation theory, by the series

$$c_{0 \rightarrow n}(t) = \delta_{n0} + c_{0 \rightarrow n}^{(1)}(t) + \dots$$

In the present case, up to first order in perturbation theory, the only non-zero coefficients are  $c_{0 \rightarrow 0}(t) = 1$  and  $c_{0 \rightarrow 1}(t) = c_{0 \rightarrow 1}^{(1)}(t)$ , calculated above. Therefore, we have

$$|\alpha, t\rangle = e^{-iE_0 t/\hbar} |0\rangle + c_{0 \rightarrow 1}^{(1)}(t) e^{-iE_1 t/\hbar} |1\rangle = e^{-i\omega_0 t/2} |0\rangle + c_{0 \rightarrow 1}^{(1)}(t) e^{-i3\omega_0 t/2} |1\rangle,$$

from which  $\langle x \rangle$  can be easily calculated.

3. For the process under exam, the initial and final states are

$$|i\rangle = |\vec{q}_i\rangle |\dots, n_{\vec{k}_i, \lambda_i}, \dots, n_{\vec{k}_f, \lambda_f}, \dots\rangle, \quad |f\rangle = |\vec{q}_f\rangle |\dots, n_{\vec{k}_i, \lambda_i} - 1, \dots, n_{\vec{k}_f, \lambda_f} + 1, \dots\rangle.$$

The interaction term  $H''$  reads

$$H'' = \frac{e^2}{2m} \vec{A}^2 = \frac{e^2}{2m} \sum_{\vec{k}, \lambda} \sum_{\vec{k}', \lambda'} \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3} \frac{\vec{\epsilon}_{\vec{k}, \lambda} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}', \lambda'}}{\sqrt{\omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'}}} \\ \times \left( a_{\vec{k}, \lambda} a_{\vec{k}', \lambda'} e^{i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}} + a_{\vec{k}, \lambda} a_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} + a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger a_{\vec{k}', \lambda'} e^{i(-\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}} + a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger a_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger e^{-i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}} \right)$$

Since the total number of photons is not changed between the initial and the final state, only the second and third terms in the brackets of the expression for  $H''$  will contribute to the first-order matrix element of this process.

Assuming for simplicity that the initial state contains just one photon in the mode  $(\vec{k}_i, \lambda_i)$  and the final state just one photon in the mode  $(\vec{k}_f, \lambda_f)$ , which means  $n_{\vec{k}_i, \lambda_i} = 1$  and  $n_{\vec{k}_f, \lambda_f} = 0$ , we have

$$|i\rangle = |\vec{q}_i\rangle a_{\vec{k}_i, \lambda_i}^\dagger |0\rangle_{\text{rad}}, \quad |f\rangle = |\vec{q}_f\rangle a_{\vec{k}_f, \lambda_f}^\dagger |0\rangle_{\text{rad}},$$

and

$$\langle f | H'' | i \rangle = \frac{e^2}{2m} \sum_{\vec{k}, \lambda} \sum_{\vec{k}', \lambda'} \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3} \frac{\vec{\epsilon}_{\vec{k}, \lambda} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}', \lambda'}}{\sqrt{\omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'}}} \\ \times \langle \vec{q}_f |_{\text{rad}} \langle 0 | a_{\vec{k}_f, \lambda_f}^\dagger \left( a_{\vec{k}, \lambda} a_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} + a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger a_{\vec{k}', \lambda'} e^{i(-\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}} \right) a_{\vec{k}_i, \lambda_i} |0\rangle_{\text{rad}} |\vec{q}_i\rangle$$

Let's concentrate on the radiation part of the matrix element. We have to consider two terms:

$$\text{rad} \langle 0 | a_{\vec{k}_f, \lambda_f} a_{\vec{k}, \lambda} a_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger a_{\vec{k}_i, \lambda_i}^\dagger |0\rangle_{\text{rad}} \quad \text{and} \quad \text{rad} \langle 0 | a_{\vec{k}_f, \lambda_f} a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger a_{\vec{k}', \lambda'} a_{\vec{k}_i, \lambda_i}^\dagger |0\rangle_{\text{rad}}.$$

The first term gives (omitting for brevity the  $\lambda$  symbols and the suffix "rad")

$$\langle 0 | a_{\vec{k}_f} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}'}^\dagger a_{\vec{k}_i} |0\rangle = \langle 0 | a_{\vec{k}_f} \left( \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} + a_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger a_{\vec{k}} \right) a_{\vec{k}_i}^\dagger |0\rangle = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \langle 0 | a_{\vec{k}_f} a_{\vec{k}_i}^\dagger |0\rangle + \langle 0 | a_{\vec{k}_f} a_{\vec{k}'}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}_i}^\dagger |0\rangle \\ = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \langle 0 | \left( \delta_{\vec{k}_i, \vec{k}_f} + a_{\vec{k}_f}^\dagger a_{\vec{k}_i} \right) |0\rangle + \langle 0 | a_{\vec{k}_f} a_{\vec{k}'}^\dagger \left( \delta_{\vec{k}, \vec{k}_i} + a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \right) |0\rangle \\ = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\vec{k}_i, \vec{k}_f} + \delta_{\vec{k}, \vec{k}_i} \langle 0 | a_{\vec{k}_f} a_{\vec{k}'}^\dagger |0\rangle = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\vec{k}_i, \vec{k}_f} + \delta_{\vec{k}, \vec{k}_i} \langle 0 | \left( \delta_{\vec{k}_f, \vec{k}'} + a_{\vec{k}_f}^\dagger a_{\vec{k}'} \right) |0\rangle \\ = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\vec{k}_i, \vec{k}_f} + \delta_{\vec{k}, \vec{k}_i} \delta_{\vec{k}_f, \vec{k}'}.$$

Analogously, the second term gives

$$\langle 0 | a_{\vec{k}_f} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}'}^\dagger a_{\vec{k}_i} |0\rangle = \delta_{\vec{k}, \vec{k}_f} \delta_{\vec{k}_i, \vec{k}'}.$$

The contribution of the form  $\delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{\vec{k}_i,\vec{k}_f}$  is not acceptable, since it requires that the initial and final photon momenta coincide ( $\vec{k}_i = \vec{k}_f$ ), which is not true in general. The other two contributions, once replaced in the matrix element  $\langle f|H''|i\rangle$ , give

$$\langle f|H''|i\rangle = \frac{e^2}{2m} \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3} \frac{\vec{\epsilon}_{\vec{k}_i,\lambda_i} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}_f,\lambda_f}}{\sqrt{\omega_{\vec{k}_i}\omega_{\vec{k}_f}}} 2 \langle \vec{q}_f | e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_f) \cdot \vec{x}} | \vec{q}_i \rangle .$$

We are left now with the evaluation of the bracket in the matter space:

$$\langle \vec{q}_f | e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_f) \cdot \vec{x}} | \vec{q}_i \rangle = \int_{L^3} \frac{e^{-i\vec{q}_f \cdot \vec{x}}}{L^{3/2}} e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_f) \cdot \vec{x}} \frac{e^{i\vec{q}_i \cdot \vec{x}}}{L^{3/2}} d^3x = \delta_{\vec{k}_f + \vec{q}_f, \vec{k}_i + \vec{q}_i} ,$$

which means the momentum conservation

$$\hbar\vec{k}_f + \hbar\vec{q}_f = \hbar\vec{k}_i + \hbar\vec{q}_i .$$

The transition rate is finally given by

$$\frac{dP}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|H''|i\rangle|^2 \delta \left( \hbar\omega_{\vec{k}_i} + \frac{\hbar^2 \vec{q}_i^2}{2m} - \hbar\omega_{\vec{k}_f} - \frac{\hbar^2 \vec{q}_f^2}{2m} \right) .$$

## Appello straordinario, 13 aprile 2015

1. The  $x^2 - y^2$  operator is parity-even and can be written as combination of rank-2 spherical tensors (see Problem 1 of September 2, 2013):  $T_{-2}^{(2)} + T_2^{(2)}$ .

The ratio  $R_2$  is trivially zero, since the numerator vanishes due to the parity selection rule ( $|3, 2, -1\rangle$  is even, while  $|2, 1, 1\rangle$  is odd) and the denominator is different from zero.

According to the Wigner-Eckart theorem, the ratio  $R_1$  can be written as follows:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\langle 4, 3, 1 | (x^2 - y^2) | 2, 1, -1 \rangle}{\langle 4, 3, -2 | (x^2 - y^2) | 2, 1, 0 \rangle} = \frac{\langle 4, 3, 1 | T_2^{(2)} | 2, 1, -1 \rangle}{\langle 4, 3, -2 | T_{-2}^{(2)} | 2, 1, 0 \rangle} \\ &= \frac{\left( \langle 2, 2 | \langle 1, -1 | \right) | 3, 1 \rangle \cdot \langle 4, 3 | T^{(2)} | | 2, 1 \rangle}{\left( \langle 2, -2 | \langle 1, 0 | \right) | 3, -2 \rangle \cdot \langle 4, 3 | T^{(2)} | | 2, 1 \rangle} = \frac{\sqrt{1/15}}{\sqrt{1/3}} = \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

2. (i) To first order perturbation theory, the probability amplitude of the transition from the state  $|n, l, m\rangle$  at  $t = -\infty$  to the state  $|n', l', m'\rangle$  at  $t = +\infty$  is given by

$$c_{(n,l,m) \rightarrow (n',l',m')}^{(1)} = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle n', l', m' | V(t) | n, l, m \rangle e^{i\omega_{n'n}t}, \quad \omega_{n'n} = \frac{E_{n'} - E_n}{\hbar},$$

where  $|n, l, m\rangle$  and  $E_n$  denote, respectively, eigenstates and eigenvalues of the unperturbed Hamiltonian of a non-relativistic hydrogen atom.

The potential  $V$  is proportional to  $x^2 - y^2$ , therefore can be written in terms of components of a rank-2 spherical tensor, as the combination  $T_{-2}^{(2)} + T_2^{(2)}$ . According to the Wigner-Eckart theorem and to the parity selection rule, here is the list of possible transitions:

- initial states:  $|n, l = 0, m = 0\rangle$ , final states:  $|n', l' = 2, m' = \pm 2\rangle$ ,
- initial states:  $|n, l = 1, m\rangle$ , final states:  $|n', l' = 3, m' = m \pm 2\rangle$  and  $|n', l' = 1, m' = m \pm 2\rangle$ ,
- initial states:  $|n, l \geq 2, m\rangle$ , final states:  $|n', l' = l + 2, m' = m \pm 2\rangle$ ,  $|n', l' = l, m' = m \pm 2\rangle$  and  $|n', l' = l - 2, m' = m \pm 2\rangle$ ,

where it is understood everywhere that  $n \geq l + 1$ ,  $n' \geq l' + 1$ ,  $|m| \leq l$  and  $|m'| \leq l'$  must be satisfied.

- (ii) If the initial state is  $|1, 0, 0\rangle$ , we have ( $n \geq 3$ )

$$\begin{aligned} c_{(1,0,0) \rightarrow (n,2,\pm 2)}^{(1)} &= \frac{A}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-\alpha^2 t^2} e^{i\omega_{n1}t} \langle n, 2, \pm 2 | (x^2 - y^2) | 1, 0, 0 \rangle \\ &= \frac{A}{i\hbar} \frac{\sqrt{\pi}}{|\alpha|} e^{-\frac{\omega_{n1}^2}{4\alpha^2}} \langle n, 2, \pm 2 | (x^2 - y^2) | 1, 0, 0 \rangle, \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} \langle n, 2, \pm 2 | (x^2 - y^2) | 1, 0, 0 \rangle &= \int d\Omega \int_0^\infty r^2 dr R_{n2}(r) [Y_{\pm 2}^2(\theta, \phi)]^* r^2 \sin^2 \theta \cos(2\phi) R_{10}(r) Y_0^0(\theta, \phi) \\ &= \int_0^\infty dr r^4 R_{n2}(r) R_{10}(r) \int d\Omega \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{\mp 2i\phi} \sin^2 \theta \cos(2\phi) \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{15}} \int_0^\infty dr r^4 R_{n2}(r) R_{10}(r). \end{aligned}$$

3. Since the target is represented by heavy nuclei, we can treat them as a fixed scattering center ( $\vec{x}_2 = 0$ ). Then, in Born approximation, at first order, the scattering amplitude for *definite* initial and final spin states is given by (Sakurai, (7.2.2)-(7.2.4))

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3x e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} C \langle m'_1, m'_2 | \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 | m_1, m_2 \rangle \delta^{(3)}(\vec{x}) = -\frac{Cm}{2\pi\hbar^2} \langle m'_1, m'_2 | \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 | m_1, m_2 \rangle.$$

The differential cross section is then

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{|C|^2 m^2}{(2\pi\hbar^2)^2} |\langle m'_1, m'_2 | \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 | m_1, m_2 \rangle|^2.$$

Averaging over the initial spin states and summing over the final ones means taking

$$\frac{1}{4} \sum_{m'_1, m'_2, m_1, m_2} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|C|^2 m^2}{(2\pi\hbar^2)^2} \frac{1}{4} \sum_{m'_1, m'_2, m_1, m_2} |\langle m'_1, m'_2 | \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 | m_1, m_2 \rangle|^2.$$

By completeness,

$$\sum_{m'_1, m'_2, m_1, m_2} |\langle m'_1, m'_2 | \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 | m_1, m_2 \rangle|^2 = \sum_{m_1, m_2} \langle m_1, m_2 | (\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2)^2 | m_1, m_2 \rangle.$$

Then, working in the base of total spin and using

$$\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = \frac{1}{2} (\vec{S}_{tot}^2 - \vec{s}_1^2 - \vec{s}_2^2) = \frac{1}{2} \left( \vec{S}_{tot}^2 - \frac{3}{2} \hbar^2 \right),$$

we have that  $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = -\hbar^2/4$  when the particle-nucleus system is in the singlet spin state and  $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = \hbar^2/4$  when it is in one of the triplet states. Therefore

$$\frac{1}{4} \sum_{m'_1, m'_2, m_1, m_2} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|C|^2 m^2}{(2\pi\hbar^2)^2} \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{3\hbar^2}{4} \right)^2 + 3 \left( \frac{\hbar^2}{4} \right)^2 \right] = \frac{|C|^2 m^2}{(2\pi\hbar^2)^2} \frac{3\hbar^4}{16}.$$



## I prova di recupero, 16 giugno 2015

1. The operators entering the given matrix elements can be written as components of a rank-1 spherical tensor as

$$T_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{x \pm iy}{\sqrt{2}}, \quad T_0^{(1)} = z.$$

According to the Wigner-Eckart theorem, we have

$$\begin{aligned} \langle n', l' = 2, m = 0 | z | n, l = 1, m = 0 \rangle &= \langle n', l' = 2, m = 0 | T_0^{(1)} | n, l = 1, m = 0 \rangle \\ &= \left( \langle 1, 0 | \langle 1, 0 | \right) | 2, 0 \rangle \cdot \langle n', 2 || T^{(1)} || n, 1 \rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \langle n', 2 || T^{(1)} || n, 1 \rangle \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \langle n', l' = 2, m' | \mp \frac{x \pm iy}{\sqrt{2}} | n, l = 1, m \rangle &= \langle n', l' = 2, m' | T_{\pm 1}^{(1)} | n, l = 1, m \rangle \\ &= \left( \langle 1, \pm 1 | \langle 1, m | \right) | 2, m' \rangle \cdot \langle n', 2 || T^{(1)} || n, 1 \rangle. \end{aligned}$$

The  $m$ -selection rule implies that  $m' = m \pm 1$  to have a non-zero matrix element, thus restricting the cases to

$$\begin{aligned} m = -1, \quad m' = 0 &: \quad \left( \langle 1, 1 | \langle 1, -1 | \right) | 2, 0 \rangle = \sqrt{\frac{1}{6}}, \\ m = -1, \quad m' = -2 &: \quad \left( \langle 1, -1 | \langle 1, -1 | \right) | 2, -2 \rangle = 1, \\ m = 0, \quad m' = 1 &: \quad \left( \langle 1, 1 | \langle 1, 0 | \right) | 2, 1 \rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ m = 0, \quad m' = -1 &: \quad \left( \langle 1, -1 | \langle 1, 0 | \right) | 2, -1 \rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ m = +1, \quad m' = 2 &: \quad \left( \langle 1, 1 | \langle 1, 1 | \right) | 2, 2 \rangle = 1, \\ m = +1, \quad m' = 0 &: \quad \left( \langle 1, -1 | \langle 1, 1 | \right) | 2, 0 \rangle = \sqrt{\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

One then gets

$$\begin{aligned} \frac{\langle n', l' = 2, m' = 0 | -\frac{x+iy}{\sqrt{2}} | n, l = 1, m = -1 \rangle}{\langle n', l' = 2, m = 0 | z | n, l = 1, m = 0 \rangle} &= \frac{\sqrt{1/6}}{\sqrt{2/3}} = \frac{1}{2}, \\ \frac{\langle n', l' = 2, m' = -2 | \frac{x-iy}{\sqrt{2}} | n, l = 1, m = -1 \rangle}{\langle n', l' = 2, m = 0 | z | n, l = 1, m = 0 \rangle} &= \frac{1}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \\ \frac{\langle n', l' = 2, m' = 1 | -\frac{x+iy}{\sqrt{2}} | n, l = 1, m = 0 \rangle}{\langle n', l' = 2, m = 0 | z | n, l = 1, m = 0 \rangle} &= \frac{\sqrt{1/2}}{\sqrt{2/3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \frac{\langle n', l' = 2, m' = -1 | +\frac{x-iy}{\sqrt{2}} | n, l = 1, m = 0 \rangle}{\langle n', l' = 2, m = 0 | z | n, l = 1, m = 0 \rangle} &= \frac{\sqrt{1/2}}{\sqrt{2/3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\langle n', l' = 2, m' = 2 | -\frac{x+iy}{\sqrt{2}} | n, l = 1, m = 1 \rangle}{\langle n', l' = 2, m = 0 | z | n, l = 1, m = 0 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$\frac{\langle n', l' = 2, m' = 0 | +\frac{x-iy}{\sqrt{2}} | n, l = 1, m = 1 \rangle}{\langle n', l' = 2, m = 0 | z | n, l = 1, m = 0 \rangle} = \frac{\sqrt{1/6}}{\sqrt{2/3}} = \frac{1}{2}.$$

2. (i) To first order perturbation theory, the probability amplitude of the transition from the state  $|1s\rangle \equiv |n = 1, l = 0, m = 0\rangle$  at  $t = 0$  to the state  $|2s\rangle \equiv |n = 2, l = 0, m = 0\rangle$  at  $t = +\infty$  is given by

$$c_{(1,0,0)\rightarrow(2,0,0)}^{(1)} = \delta_{12}\delta_{00}\delta_{00} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^{+\infty} dt \langle 2, 0, 0 | V(t) | 1, 0, 0 \rangle e^{i\omega_{21}t}, \quad \omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar},$$

where  $E_2$  and  $E_1$  denote, respectively, the energy of the states 2s and 1s. In the present case,

$$\begin{aligned} \langle 2, 0, 0 | V(t) | 1, 0, 0 \rangle &= A \langle 2, 0, 0 | \delta(x)\delta(y)\delta(z - ct) | 1, 0, 0 \rangle \\ &= A \int d^3x \frac{R_{20}(r)}{\sqrt{4\pi}} \delta(x)\delta(y)\delta(z - ct) \frac{R_{10}(r)}{\sqrt{4\pi}} = \frac{A}{4\pi} \frac{1}{2\sqrt{2}a^3} \left(2 - \frac{ct}{a}\right) e^{-\frac{3ct}{2a}}, \end{aligned}$$

so that

$$c_{(1,0,0)\rightarrow(2,0,0)}^{(1)} = \frac{1}{i\hbar} \int_0^{+\infty} dt \frac{A}{4\pi} \frac{1}{2\sqrt{2}a^3} \left(2 - \frac{ct}{a}\right) e^{-\frac{3ct}{2a}} e^{i\omega_{21}t} = \frac{1}{i\hbar} \frac{A}{4\pi} \frac{1}{2\sqrt{2}a^3} \frac{8a(c - i\omega_{21}a)}{(3c - 2i\omega_{21}a)^2}$$

and the transition probability is

$$|c_{(1,0,0)\rightarrow(2,0,0)}^{(1)}|^2 = \frac{A^2}{(4\pi\hbar)^2} \frac{8}{a^4} \frac{c^2 + \omega_{21}^2 a^2}{(9c^2 + 4\omega_{21}^2 a^2)^2}.$$

(ii) In the limit  $c \rightarrow \infty$  the above probability goes to zero. This is not surprising: the perturbation acts so fast, that the system has not the time to “feel” it.

3. The formula for the lifetime  $\tau$  of a generic excited state with respect to the decay into another state, in the dipole approximation and by emission of one photon, is given by Eq. (2.32) in the Section 2.2 of Greiner, *Quantum Mechanics - Special chapters* and reads, in the International Systems of Units:

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)_{i \rightarrow f} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right) \frac{4\omega_{fi}^3}{3c^2} |\langle a_f | \hat{r} | a_i \rangle|^2,$$

where the indices  $i$  and  $f$  refer to the initial and final states, respectively,  $|a_i\rangle$ ,  $|a_f\rangle$  denote the initial and final atomic states, while  $\omega_{fi} = (E_f - E_i)/\hbar$ .

In the present case,

$$|a_i\rangle = |2p, m = \pm 1\rangle = |2, 1, \pm 1\rangle, \quad |a_f\rangle = |1s\rangle = |1, 0, 0\rangle, \quad \hbar\omega_{fi} = E_{1s} - E_{2p} = \frac{3}{8a} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}.$$

We need to calculate the three components of  $\langle 1, 0, 0 | \hat{r} | 2, 1, \pm 1 \rangle$ . However,  $\langle 1, 0, 0 | \hat{z} | 2, 1, \pm 1 \rangle$  is trivially zero, since the operator  $\hat{z}$  behaves as the 0-component of a rank-1 tensor and the given matrix element has  $m' \neq m$ . We are therefore left with  $\langle 1, 0, 0 | \hat{x} | 2, 1, \pm 1 \rangle$  and  $\langle 1, 0, 0 | \hat{y} | 2, 1, \pm 1 \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle 1, 0, 0 | \hat{x} | 2, 1, \pm 1 \rangle &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\infty r^2 dr R_{10}(r) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} r \sin\theta \cos\phi R_{21}(r) (\mp) \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\phi} \\ &= \mp \frac{128}{243} a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle 1, 0, 0 | \hat{y} | 2, 1, \pm 1 \rangle &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\infty r^2 dr R_{10}(r) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} r \sin \theta \sin \phi R_{21}(r) (\mp) \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi} \\
&= -i \frac{128}{243} a .
\end{aligned}$$

Finally,

$$\left( \frac{1}{\tau} \right)_{(2p, m=\pm 1) \rightarrow 1s} = \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right) \frac{4}{3c^2} \left( \frac{3c}{8a} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right)^3 2 \left( \frac{128}{243} \right)^2 a^2 = \left( \frac{2}{3} \right)^8 \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right)^4 \frac{c}{a}$$

and

$$\tau_{(2p, m=\pm 1) \rightarrow 1s} = \left( \frac{3}{2} \right)^8 \frac{a}{c\alpha^4} = 1.59479 \cdot 10^{-9} \text{ s} .$$

This result coincides with that for the transition from the state 2p with  $m = 0$  to the fundamental state.

## II prova di recupero, 21 luglio 2015

1. The  $xz$  operator is parity-even and can be written as combination of rank-2 spherical tensors (see Problem 2 of July 14, 2004):  $T_{-1}^{(2)} - T_1^{(2)}$ . This implies that the matrix elements  $\langle n', l', m' | xz | n, l, m \rangle$  can be different from zero when

- $m' = m \pm 1$  ( $m$ -selection rule);
- $l'$  is one of the angular momentum values obtained in the composition of the angular momenta  $l$  and 2 (Wigner-Eckart theorem); these values are  $l + 2, l + 1, l, l - 1, l - 2$ , when  $l \geq 2$ ; when  $l = 1$  instead,  $l'$  must take the values 3, 2, 1; finally, when  $l = 0$ , it must necessarily be  $l' = 2$ ;
- since  $xz$  is an even operator, the states  $|n, l, m\rangle$  and  $|n', l', m'\rangle$  must have necessarily the same parity (parity rule), i.e.  $l$  and  $l'$  must be both parity-even or both parity-odd; this reduces the possible values of  $l'$  to  $l + 2, l, l - 2$ , when  $l \geq 2$ , to  $l' = 3$  and 1, when  $l = 1$ , and to  $l' = 2$ , when  $l = 0$ .

2. To first order perturbation theory, the probability amplitude of the transition from the state  $|1s\rangle \equiv |n = 1, l = 0, m = 0\rangle$  at  $t = 0$  to the state  $|2, 1, 1\rangle$  at  $t = +\infty$  is given by

$$\begin{aligned} c_{(1,0,0) \rightarrow (2,1,1)}^{(1)} &= \delta_{12} \delta_{01} \delta_{01} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^{+\infty} dt \langle 2, 1, 1 | V(t) | 1, 0, 0 \rangle e^{i\omega_{21}t} \\ &= \frac{A}{i\hbar} \int_0^{t_0} dt \langle 2, 1, 1 | x | 1, 0, 0 \rangle e^{i\omega_{21}t}, \quad \omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}, \end{aligned}$$

where  $E_2$  and  $E_1$  denote, respectively, the energy of the states  $|n = 2, l = 1, m = 1\rangle$  and  $1s$ . Then,

$$\begin{aligned} \langle 2, 1, 1 | x | 1, 0, 0 \rangle &= \int d\Omega \int_0^\infty r^2 dr R_{21}(r) [Y_1^1(\theta, \phi)]^* r \sin \theta \cos \phi R_{10}(r) Y_0^0(\theta, \phi) \\ &= \int_0^\infty dr r^3 R_{21}(r) R_{10}(r) \cdot \int d\Omega (-) \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi} \sin \theta \cos \phi \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\ &= a \frac{128}{81} \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (-) \sqrt{\frac{1}{6}} = -a \frac{128}{243} = -a \frac{2^7}{3^5}, \end{aligned}$$

whereas

$$\int_0^{t_0} dt e^{i\omega_{21}t} = \frac{1}{i\omega_{21}} (e^{i\omega_{21}t_0} - 1).$$

Putting everything together, one gets for the transition probability

$$|c_{(1,0,0) \rightarrow (2,1,1)}^{(1)}|^2 = \left[ \frac{Aa}{\hbar\omega_{21}} \frac{2^7}{3^5} \right]^2 4 \sin^2 \left( \frac{\omega_{21}t_0}{2} \right).$$

3. (i) The cross section before the average/summation over polarizations and the integration over final momenta is given by

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{L^3}{c} \frac{8\pi}{\hbar} \left( \frac{1}{2mc^2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{L^3} \right)^2 \\ &\times \frac{|\vec{\epsilon}_{\vec{k}_i, \lambda_i} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}_f, \lambda_f}|^2}{\omega_{\vec{k}_i} \omega_{\vec{k}_f}} \delta_{\vec{k}_f + \vec{q}_f, \vec{k}_i + \vec{q}_i} \delta \left( \hbar\omega_{k_i} + \frac{\hbar^2 \vec{q}_i^2}{2m} - \hbar\omega_{k_f} - \frac{\hbar^2 \vec{q}_f^2}{2m} \right), \\ &\simeq \frac{L^3}{c} \frac{8\pi}{\hbar} \left( \frac{1}{2mc^2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{L^3} \right)^2 \frac{|\vec{\epsilon}_{\vec{k}_i, \lambda_i} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}_f, \lambda_f}|^2}{\omega_{\vec{k}_i} \omega_{\vec{k}_f}} \delta_{\vec{k}_f + \vec{q}_f, \vec{k}_i + \vec{q}_i} \delta \left( \hbar\omega_{k_i} - \hbar\omega_{k_f} \right), \end{aligned}$$

where the kinetic energies of the electrons in the initial and final states have been neglected in the argument of the Dirac delta.

(ii) Choosing the polarization vectors as in Fig. 2.13 of Greiner, *Quantum Mechanics - Special chapters*, one gets for the average over the polarizations of the photon in the initial state and the sum over the polarizations of the photon in the final state the following expression:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\lambda_i} \sum_{\lambda_f} |\vec{\epsilon}_{\vec{k}_i, \lambda_i} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}_f, \lambda_f}|^2 &= \frac{1}{2} \left[ |\vec{\epsilon}_{\vec{k}_i, 1} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}_f, 1}|^2 + |\vec{\epsilon}_{\vec{k}_i, 1} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}_f, 2}|^2 + |\vec{\epsilon}_{\vec{k}_i, 2} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}_f, 1}|^2 + |\vec{\epsilon}_{\vec{k}_i, 2} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}_f, 2}|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} [1 + 0 + 0 + \cos^2 \theta] , \end{aligned}$$

where  $\theta$  is the angle between  $\vec{k}_i$  and  $\vec{k}_f$ .

(iii) The summation over the final electron momenta is trivial, since

$$\sum_{\vec{q}_f} \delta_{\vec{k}_f + \vec{q}_f, \vec{k}_i + \vec{q}_i} = 1$$

(note that nothing else depends on  $\vec{q}_f$  in the expression for  $d\sigma$ ).

What is left to be done is the summation over final photon momenta. First of all, we use the replacement (valid in the infinite volume limit)

$$\sum_{\vec{k}_f} \longrightarrow \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3 k_f .$$

Then, the integration over  $\vec{k}_f$  is performed in spherical polar coordinates,

$$\int d\Omega_{\vec{k}_f} \int k_f^2 dk_f .$$

We get

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\lambda_i, \lambda_f} \sum_{\vec{q}_f, k_f} d\sigma &= \frac{L^3}{c} \frac{8\pi}{\hbar} \left( \frac{1}{2mc^2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{L^3} \right)^2 \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\vec{k}_f} \int k_f^2 dk_f \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \frac{1}{c^2 k_i k_f} \\ &\times \frac{1}{\hbar c} \delta(k_i - k_f) \\ &= \left( \frac{1}{mc^2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int d\Omega_{\vec{k}_f} \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \\ &= \frac{8\pi}{3} \left( \frac{1}{mc^2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \equiv \frac{8\pi}{3} r_e^2 \simeq \frac{8\pi}{3} (2.818 \cdot 10^{-15} \text{ m})^2 \\ &\simeq 0.665 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2 = 66.5 \text{ fm}^2 , \end{aligned}$$

where  $r_e \simeq 2.818 \cdot 10^{-15} \text{ m}$  is the *classical electron radius*. The final result we have obtained is the *Thomson's scattering cross section*.

### III prova di recupero, 8 settembre 2015

1. The  $Q_{ij}$  operator is symmetric under the exchange of the indices  $i$  and  $j$ , therefore it is enough to consider the components with  $i < j$ . Recalling that, using the vector  $\vec{r}$ , it is possible to construct a rank-2 spherical tensor with components (see Problem 2 of 13 settembre 2006)

$$\begin{aligned} T_{\pm 2}^{(2)} &= \frac{1}{2}(x \pm iy)^2, \\ T_{\pm 1}^{(2)} &= \mp(x \pm iy)z, \\ T_0^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(3z^2 - r^2), \end{aligned}$$

we get immediately

$$\begin{aligned} Q_{12} = xy &= \frac{T_2^{(2)} - T_{-2}^{(2)}}{2i}, \\ Q_{13} = xz &= \frac{T_{-1}^{(2)} - T_1^{(2)}}{2}, \\ Q_{23} = yz &= -\frac{T_{-1}^{(2)} + T_1^{(2)}}{2i}, \\ Q_{33} = z^2 - \frac{r^2}{3} &= \sqrt{\frac{2}{3}}T_0^{(2)}. \end{aligned}$$

As for the remaining components, we observe that

$$\begin{aligned} Q_{11} - Q_{22} = x^2 - y^2 &= \frac{T_2^{(2)} + T_{-2}^{(2)}}{2}, \\ Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} &= 0, \end{aligned}$$

therefore

$$\begin{aligned} Q_{11} = x^2 - \frac{r^2}{3} &= \frac{T_2^{(2)} + T_{-2}^{(2)}}{4} - \frac{1}{\sqrt{6}}T_0^{(2)}, \\ Q_{22} = y^2 - \frac{r^2}{3} &= -\frac{T_2^{(2)} + T_{-2}^{(2)}}{4} - \frac{1}{\sqrt{6}}T_0^{(2)}. \end{aligned}$$

Recalling that  $Q_{ij}$  is a parity-even operator, matrix elements  $\langle n', l', m' | Q_{ij} | n, l, m \rangle$  can be different from zero when  $l'$  is one of the angular momentum values obtained in the composition of the angular momenta  $l$  and 2 (Wigner-Eckart theorem); these values are  $l + 2$ ,  $l$ ,  $l - 2$ , when  $l \geq 2$ ; when  $l = 1$  instead,  $l'$  must take the values 3 and 1; finally, when  $l = 0$ , it must necessarily be  $l' = 2$ ;

2. To first order perturbation theory, the probability amplitude of the transition from the state  $|1s\rangle \equiv |n = 1, l = 0, m = 0\rangle$  at  $t = 0$  to the state  $|n = 3, l = 2, m = 2\rangle$  at  $t = +\infty$  is given by

$$\begin{aligned} c_{(1,0,0) \rightarrow (3,2,2)}^{(1)} &= \delta_{13}\delta_{02}\delta_{02} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^{+\infty} dt \langle 3, 2, 2 | V(t) | 1, 0, 0 \rangle e^{i\omega_{31}t} \\ &= \frac{A}{i\hbar} \int_0^{t_0} dt \langle 3, 2, 2 | xy | 1, 0, 0 \rangle e^{i\omega_{31}t}, \quad \omega_{31} = \frac{E_3 - E_1}{\hbar}, \end{aligned}$$

where  $E_3$  and  $E_1$  denote, respectively, the energy of the states  $|n = 3, l = 2, m = 2\rangle$  and  $1s$ . Then,

$$\begin{aligned} \langle 3, 2, 2 | xy | 1, 0, 0 \rangle &= \int d\Omega \int_0^\infty r^2 dr R_{32}(r) [Y_2^2(\theta, \phi)]^* r^2 \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi R_{10}(r) Y_0^0(\theta, \phi) \\ &= \int_0^\infty dr r^4 R_{32}(r) R_{10}(r) \cdot \int d\Omega \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\phi} \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\ &= \frac{1}{i\sqrt{30}} \int_0^\infty dr r^4 R_{32}(r) R_{10}(r) , \end{aligned}$$

whereas

$$\int_0^{t_0} dt e^{i\omega_{31}t} = \frac{1}{i\omega_{31}} (e^{i\omega_{31}t_0} - 1) .$$

Putting everything together, one gets for the transition probability

$$|c_{(1,0,0) \rightarrow (2,1,1)}^{(1)}|^2 = \frac{A^2}{30 \hbar^2 \omega_{31}^2} \left[ \int_0^\infty dr r^4 R_{32}(r) R_{10}(r) \right]^2 4 \sin^2 \left( \frac{\omega_{31} t_0}{2} \right) .$$

3. (i) The operators  $(\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \sigma})$  and  $(\vec{k} \cdot \vec{x})$  in  $M^{(1)}$  do commute; indeed:

$$[\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \sigma}, \vec{k} \cdot \vec{x}] = \epsilon_j k_i [p_j, x_i] = k_i \epsilon_j (-i\hbar \delta_{ij}) = -i\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \sigma} = 0 ,$$

due to the transversality condition.

(ii) Using the proposed decomposition, one has

$$\begin{aligned} M^{(1)} &= \langle a_f | (\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \sigma}) (-i\vec{k} \cdot \vec{x}) | a_i \rangle \\ &= -ik_i \epsilon_j \langle a_f | x_i p_j | a_i \rangle \\ &= -ik_i \epsilon_j \left[ \frac{1}{2} \langle a_f | (x_i p_j + x_j p_i) | a_i \rangle + \frac{1}{2} \langle a_f | (x_i p_j - x_j p_i) | a_i \rangle \right] \\ &\equiv M_{\text{symm}}^{(1)} + M_{\text{antisymm}}^{(1)} . \end{aligned}$$

For the second term, i.e. the antisymmetric part, we have

$$\begin{aligned} k_i \epsilon_j (x_i p_j - x_j p_i) &= k_1 \epsilon_2 (x_1 p_2 - x_2 p_1) + k_2 \epsilon_1 (x_2 p_1 - x_1 p_2) \\ &+ k_1 \epsilon_3 (x_1 p_3 - x_3 p_1) + k_3 \epsilon_1 (x_3 p_1 - x_1 p_3) \\ &+ k_2 \epsilon_3 (x_2 p_3 - x_3 p_2) + k_3 \epsilon_2 (x_3 p_2 - x_2 p_3) \\ &= (k_1 \epsilon_2 - k_2 \epsilon_1) (x_1 p_2 - x_2 p_1) \\ &+ (k_2 \epsilon_3 - k_3 \epsilon_2) (x_2 p_3 - x_3 p_2) \\ &+ (k_3 \epsilon_1 - k_1 \epsilon_3) (x_3 p_1 - x_1 p_3) \\ &= (\vec{k} \times \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \sigma}) \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) , \end{aligned}$$

so that

$$M_{\text{antisymm}}^{(1)} = -\frac{i}{2} (\vec{k} \times \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \sigma}) \cdot \langle a_f | (\vec{r} \times \vec{p}) | a_i \rangle .$$

(iii) The first term of  $M^{(1)}$ , i.e. the symmetric part, by virtue of the property in (i), can be written also

$$M_{\text{symm}}^{(1)} = -ik_i \epsilon_j \frac{1}{2} \langle a_f | (x_i p_j + p_i x_j) | a_i \rangle .$$

Then, we can use the commutator  $[x_i, H_m] = i\hbar p_i/m$ , where  $H_m$  is the Hamiltonian of the matter system, to get

$$\begin{aligned}
M_{\text{symm}}^{(1)} &= -ik_i\epsilon_j \frac{1}{2} \frac{m}{i\hbar} \langle a_f | (x_i[x_j, H_m] + [x_i, H_m]x_j) | a_i \rangle \\
&= -k_i\epsilon_j \frac{1}{2} \frac{m}{\hbar} \langle a_f | (x_i[x_j, H_m] + [x_i, H_m]x_j) | a_i \rangle \\
&= -k_i\epsilon_j \frac{1}{2} \frac{m}{\hbar} \langle a_f | (x_i x_j H_m - H_m x_i x_j) | a_i \rangle \\
&= -k_i\epsilon_j \frac{1}{2} \frac{m}{\hbar} (E_i - E_f) \langle a_f | x_i x_j | a_i \rangle \\
&= -k_i\epsilon_j \frac{1}{2} \frac{m}{\hbar} (E_i - E_f) \langle a_f | \left( x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2 \right) | a_i \rangle ,
\end{aligned}$$

where, in the last equality, the property  $\vec{k} \cdot \epsilon_{\vec{k},\sigma} = 0$  has been used.



## Appello straordinario, 17 novembre 2015

1. We first use the Theorem (3.10.27) of Sakurai to build a rank-2 spherical tensor from two rank-1 spherical tensors:

$$T_q^{(2)} = \sum_{q_1=-1}^{+1} \sum_{q_2=-1}^{+1} \left( \langle 1, q_1 | \langle 1, q_2 | \right) |2, q\rangle X_{q_1}^{(1)} Z_{q_2}^{(1)},$$

which leads to

$$\begin{aligned} T_{+2}^{(2)} &= \sum_{q_1=-1}^{+1} \sum_{q_2=-1}^{+1} \left( \langle 1, q_1 | \langle 1, q_2 | \right) |2, 2\rangle X_{q_1}^{(1)} Z_{q_2}^{(1)} = \left( \langle 1, 1 | \langle 1, 1 | \right) |2, 2\rangle X_{+1}^{(1)} Z_{+1}^{(1)} = X_{+1}^{(1)} Z_{+1}^{(1)}, \\ T_{+1}^{(2)} &= \sum_{q_1=-1}^{+1} \sum_{q_2=-1}^{+1} \left( \langle 1, q_1 | \langle 1, q_2 | \right) |2, 1\rangle X_{q_1}^{(1)} Z_{q_2}^{(1)} \\ &= \left( \langle 1, 1 | \langle 1, 0 | \right) |2, 1\rangle X_{+1}^{(1)} Z_0^{(1)} + \left( \langle 1, 0 | \langle 1, 1 | \right) |2, 1\rangle X_0^{(1)} Z_{+1}^{(1)} = \frac{X_{+1}^{(1)} Z_0^{(1)} + X_0^{(1)} Z_{+1}^{(1)}}{\sqrt{2}}, \\ T_0^{(2)} &= \sum_{q_1=-1}^{+1} \sum_{q_2=-1}^{+1} \left( \langle 1, q_1 | \langle 1, q_2 | \right) |2, 0\rangle X_{q_1}^{(1)} Z_{q_2}^{(1)} \\ &= \left( \langle 1, 1 | \langle 1, -1 | \right) |2, 0\rangle X_{+1}^{(1)} Z_{-1}^{(1)} + \left( \langle 1, 0 | \langle 1, 0 | \right) |2, 0\rangle X_0^{(1)} Z_0^{(1)} + \left( \langle 1, -1 | \langle 1, 1 | \right) |2, 0\rangle X_{-1}^{(1)} Z_{+1}^{(1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} X_{+1}^{(1)} Z_{-1}^{(1)} + \sqrt{\frac{2}{3}} X_0^{(1)} Z_0^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{6}} X_{-1}^{(1)} Z_{+1}^{(1)}, \\ T_{-1}^{(2)} &= \sum_{q_1=-1}^{+1} \sum_{q_2=-1}^{+1} \left( \langle 1, q_1 | \langle 1, q_2 | \right) |2, -1\rangle X_{q_1}^{(1)} Z_{q_2}^{(1)} \\ &= \left( \langle 1, -1 | \langle 1, 0 | \right) |2, -1\rangle X_{-1}^{(1)} Z_0^{(1)} + \left( \langle 1, 0 | \langle 1, -1 | \right) |2, -1\rangle X_0^{(1)} Z_{-1}^{(1)} = \frac{X_{-1}^{(1)} Z_0^{(1)} + X_0^{(1)} Z_{-1}^{(1)}}{\sqrt{2}}, \\ T_{-2}^{(2)} &= \sum_{q_1=-1}^{+1} \sum_{q_2=-1}^{+1} \left( \langle 1, q_1 | \langle 1, q_2 | \right) |2, -2\rangle X_{q_1}^{(1)} Z_{q_2}^{(1)} = \left( \langle 1, -1 | \langle 1, -1 | \right) |2, -2\rangle X_{-1}^{(1)} Z_{-1}^{(1)} = X_{-1}^{(1)} Z_{-1}^{(1)}. \end{aligned}$$

The last step is to express the rank-1 spherical tensors,  $X_{q_1}^{(1)}$  and  $Z_{q_2}^{(1)}$ , using the components of the position operator and those of the momentum operator:

$$\begin{aligned} X_{+1}^{(1)} &= -\frac{x+iy}{\sqrt{2}}, & X_0^{(1)} &= z, & X_{-1}^{(1)} &= +\frac{x-iy}{\sqrt{2}}, \\ Z_{+1}^{(1)} &= -\frac{p_x+ip_y}{\sqrt{2}}, & Z_0^{(1)} &= p_z, & Z_{-1}^{(1)} &= +\frac{p_x-ip_y}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

2. For the given system, the potential is

$$V(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ -E_0 z e^{-t/\tau}, & t \geq 0. \end{cases}$$

To first order perturbation theory, the probability amplitude of the transition from the state  $|n, 1, 0\rangle$  at  $t = 0$  to the state  $|n, 2, m\rangle$  at  $t = +\infty$  is given by

$$\begin{aligned} c_{(n,1,0) \rightarrow (n,2,m)}^{(1)} &= \delta_{nm} \delta_{12} \delta_{0m} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^{+\infty} dt \langle n, 2, m | V(t) | n, 1, 0 \rangle e^{i\omega_{nn}t} \\ &= -\frac{E_0}{i\hbar} \int_0^{+\infty} dt \langle n, 2, m | z | n, 1, 0 \rangle e^{-t/\tau}, \quad \omega_{nn} = \frac{E_n - E_n}{\hbar} = 0. \end{aligned}$$

Since the operator  $z$  behaves as the 0-component of a rank-1 spherical tensor, due to the  $m$ -selection rule, only for  $m = 0$  the transition amplitude can be different from zero. Then,

$$\begin{aligned} \langle n, 2, 0 | z | n, 1, 0 \rangle &= \int d\Omega \int_0^\infty r^2 dr R_{n2}(r) [Y_0^2(\theta, \phi)]^* r \cos \theta R_{n1}(r) Y_0^1(\theta, \phi) \\ &= \int_0^\infty dr r^3 R_{n2}(r) R_{n1}(r) \cdot \int d\Omega \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \cos \theta \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ &= \frac{2}{\sqrt{15}} \int_0^\infty dr r^3 R_{n2}(r) R_{n1}(r) \equiv \frac{2}{\sqrt{15}} I_r, \end{aligned}$$

whereas

$$\int_0^\infty dt e^{-t/\tau} = \frac{1}{\tau}.$$

Hence, the first order transition probability turns to be

$$|c_{(n,1,0) \rightarrow (n,2,0)}^{(1)}|^2 = \frac{4E_0^2}{15 \hbar^2 \tau^2} I_r^2.$$

3. In first order Born approximation, the scattering amplitude for a spherically symmetric potential is given by

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi \hbar^2} \int d^3x e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}} V(\vec{x}) = -\frac{m}{2\pi \hbar^2} \int d^3x e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}} A \delta^{(3)}(\vec{x}) = -\frac{A m}{2\pi \hbar^2},$$

so that the differential cross section is

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{|A|^2 m^2}{4\pi^2 \hbar^4}$$

and the total cross section

$$\sigma = \frac{|A|^2 m^2}{\pi \hbar^4}.$$

**I prova finale, 11 febbraio 2016**

1. Since the orbital angular momentum is a vector, its components can be written in terms of those of a rank-1 spherical tensor, in particular

$$L_x = \frac{T_{-1}^{(1)} - T_{+1}^{(1)}}{\sqrt{2}}, \quad L_z = T_0^{(1)}.$$

Using the Wigner-Eckart theorem, we have then

$$\begin{aligned} & \langle \alpha', j = 3/2, m = 3/2 | L_x | \alpha, j = 3/2, m = 1/2 \rangle \\ &= \langle \alpha', j = 3/2, m = 3/2 | \frac{T_{-1}^{(1)} - T_{+1}^{(1)}}{\sqrt{2}} | \alpha, j = 3/2, m = 1/2 \rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \langle \alpha', j = 3/2, m = 3/2 | T_{+1}^{(1)} | \alpha, j = 3/2, m = 1/2 \rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \langle 1, 1 | \langle 3/2, 1/2 | \right) | 3/2, 3/2 \rangle \text{ (RME)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\sqrt{\frac{2}{5}} \right) \text{ (RME)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ (RME)} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & \langle \alpha', j = 3/2, m = 1/2 | L_z | \alpha, j = 3/2, m = 1/2 \rangle \\ &= \langle \alpha', j = 3/2, m = 1/2 | T_0^{(1)} | \alpha, j = 3/2, m = 1/2 \rangle \\ &= \left( \langle 1, 0 | \langle 3/2, 1/2 | \right) | 3/2, 1/2 \rangle \text{ (RME)} = \frac{1}{\sqrt{15}} \text{ (RME)}, \end{aligned}$$

where RME stands for the common reduced matrix element. Hence we get

$$\frac{\langle \alpha', j = 3/2, m = 3/2 | L_x | \alpha, j = 3/2, m = 1/2 \rangle}{\langle \alpha', j = 3/2, m = 1/2 | L_z | \alpha, j = 3/2, m = 1/2 \rangle} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{15}}} = \sqrt{3}.$$

Using the projection theorem, we have instead

$$\begin{aligned} & \langle \alpha', j = 3/2, m = 3/2 | L_x | \alpha, j = 3/2, m = 1/2 \rangle \\ &= \langle \alpha', j = 3/2, m = 3/2 | J_x | \alpha, j = 3/2, m = 1/2 \rangle \\ &\times \frac{\langle \alpha', j = 3/2, m = 1/2 | \vec{J} \cdot \vec{L} | \alpha, j = 3/2, m = 1/2 \rangle}{\hbar^2 3/2(3/2 + 1)} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & \langle \alpha', j = 3/2, m = 1/2 | L_z | \alpha, j = 3/2, m = 1/2 \rangle \\ &= \langle \alpha', j = 3/2, m = 1/2 | J_z | \alpha, j = 3/2, m = 1/2 \rangle \\ &\times \frac{\langle \alpha', j = 3/2, m = 1/2 | \vec{J} \cdot \vec{L} | \alpha, j = 3/2, m = 1/2 \rangle}{\hbar^2 3/2(3/2 + 1)}, \end{aligned}$$

so that, we get

$$\begin{aligned} & \frac{\langle \alpha', j = 3/2, m = 3/2 | L_x | \alpha, j = 3/2, m = 1/2 \rangle}{\langle \alpha', j = 3/2, m = 1/2 | L_z | \alpha, j = 3/2, m = 1/2 \rangle} \\ &= \frac{\langle \alpha', j = 3/2, m = 3/2 | J_x | \alpha, j = 3/2, m = 1/2 \rangle}{\langle \alpha', j = 3/2, m = 1/2 | J_z | \alpha, j = 3/2, m = 1/2 \rangle} \\ &= \frac{\langle \alpha', j = 3/2, m = 3/2 | \frac{J_+ + J_-}{2} | \alpha, j = 3/2, m = 1/2 \rangle}{\hbar/2} = \frac{\hbar \frac{\sqrt{3}}{2}}{\hbar/2} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

2. To first order perturbation theory, the probability amplitude of the transition from the state  $|1, 0, 0\rangle$  at  $t = 0$  to the state  $|2, 1, m\rangle$  at  $t = +\infty$  is given by

$$\begin{aligned} c_{(1,0,0)\rightarrow(2,1,m)}^{(1)} &= \delta_{12}\delta_{01}\delta_{0m} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^{+\infty} dt \langle 2, 1, m|V(t)|1, 0, 0\rangle e^{i\omega_{21}t} \\ &= \frac{A}{i\hbar} \int_0^{t_0} dt \langle 2, 1, m|p_z|1, 0, 0\rangle e^{i\omega_{21}t}, \quad \omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}. \end{aligned}$$

Since the operator  $p_z$  behaves as the 0-component of a rank-1 spherical tensor, due to the  $m$ -selection rule, only for  $m = 0$  the transition amplitude can be different from zero. Then,

$$\begin{aligned} \langle 2, 1, 0|p_z|1, 0, 0\rangle &= \int d\Omega \int_0^\infty r^2 dr R_{21}(r)[Y_0^1(\theta, \phi)]^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z}\right) R_{10}(r)Y_0^0(\theta, \phi) \\ &= \int d\Omega \int_0^\infty r^2 dr R_{21}(r)[Y_0^1(\theta, \phi)]^* \left(i\hbar \frac{\cos\theta}{a}\right) R_{10}(r)Y_0^0(\theta, \phi), \end{aligned}$$

where it has been used that

$$\frac{\partial}{\partial z} R_{10}(r) = -\frac{1}{a} \frac{z}{r} R_{10}(r) = -\frac{\cos\theta}{a} R_{10}(r)$$

and the fact that  $Y_0^0$  is a constant. We get

$$\begin{aligned} \langle 2, 1, 0|p_z|1, 0, 0\rangle &= \frac{i\hbar}{a} \int_0^\infty dr r^2 R_{21}(r)R_{10}(r) \cdot \int d\Omega \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \cos\theta \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ &= \frac{i\hbar}{a} \cdot \frac{16}{27} \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

whereas

$$\int_0^{t_0} dt e^{i\omega_{21}t} = \frac{1}{i\omega_{21}} (e^{i\omega_{21}t_0} - 1).$$

Hence, the first order transition probability turns to be

$$|c_{(1,0,0)\rightarrow(2,1,0)}^{(1)}|^2 = \frac{A^2}{a^2} \frac{2048}{6561} \frac{\sin^2(\omega_{21}t_0)}{\omega_{21}^2}.$$

In the limit  $t_0 \rightarrow \infty$ , the same arguments apply which lead to Fermi's golden rule, so that the required probability becomes proportional to  $\delta(\omega_{21}) = \hbar \delta(E_2 - E_1)$ , *i.e.* it is equal to zero.

3. We note that

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{1}{i\hbar} \left[ \frac{d\vec{x}}{dt}, H_m \right] = -\frac{1}{\hbar^2} [[\vec{x}, H_m], H_m],$$

so that

$$\begin{aligned} \langle f | \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} | i \rangle &= -\frac{1}{\hbar^2} \langle f | [[\vec{x}, H_m], H_m] | i \rangle = -\frac{1}{\hbar^2} \langle f | ([\vec{x}, H_m] H_m - H_m [\vec{x}, H_m]) | i \rangle \\ &= -\frac{1}{\hbar^2} (E_i - E_f) \langle f | [\vec{x}, H_m] | i \rangle = -\frac{1}{\hbar^2} (E_i - E_f) \langle f | (\vec{x} H_m - H_m \vec{x}) | i \rangle \\ &= -\frac{1}{\hbar^2} (E_i - E_f)^2 \langle f | \vec{x} | i \rangle = -\omega_{fi}^2 \langle f | \vec{x} | i \rangle. \end{aligned}$$

Hence,

$$|\langle f | \vec{x} | i \rangle|^2 = \frac{1}{\omega_{fi}^4} \langle f | \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} | i \rangle$$

and the energy emitted per unit time can be written as

$$\frac{\hbar\omega_{fi}}{\tau} = \hbar\omega_{fi} \frac{4}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega_{fi}^3}{\hbar c^3} \frac{1}{\omega_{fi}^4} \langle f | \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} | i \rangle = \frac{4}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^3} \langle f | \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} | i \rangle ,$$

a factor two larger than the classical result.

## II prova finale, 25 febbraio 2016

1. First, we use the components of the vectors  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  and  $\vec{w}$  to build three different rank-1 spherical tensors:

$$\begin{aligned} U_0^{(1)} &= u_z, & U_{\pm 1}^{(1)} &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(u_x \pm iu_y), \\ V_0^{(1)} &= v_z, & V_{\pm 1}^{(1)} &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(v_x \pm iv_y), \\ W_0^{(1)} &= w_z, & W_{\pm 1}^{(1)} &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(w_x \pm iw_y). \end{aligned}$$

Then, using the theorem (3.10.27) of Sakurai, we compose any two of these three rank-1 spherical tensors, say  $U^{(1)}$  and  $V^{(1)}$  to build a rank-2 spherical tensor,  $Z^{(2)}$ . We will need only the components  $Z_{+2}^{(2)}$  and  $Z_{+1}^{(2)}$ :

$$\begin{aligned} Z_{+2}^{(2)} &= \sum_{q_1=-1}^{+1} \sum_{q_2=-1}^{+1} \left( \langle 1, q_1 | \langle 1, q_2 | \right) |2, 2\rangle U_{q_1}^{(1)} V_{q_2}^{(1)} = \left( \langle 1, 1 | \langle 1, 1 | \right) |2, 2\rangle U_{+1}^{(1)} V_{+1}^{(1)} = U_{+1}^{(1)} V_{+1}^{(1)}, \\ Z_{+1}^{(2)} &= \sum_{q_1=-1}^{+1} \sum_{q_2=-1}^{+1} \left( \langle 1, q_1 | \langle 1, q_2 | \right) |2, 1\rangle U_{q_1}^{(1)} V_{q_2}^{(1)} \\ &= \left( \langle 1, 1 | \langle 1, 0 | \right) |2, 1\rangle U_{+1}^{(1)} V_0^{(1)} + \left( \langle 1, 0 | \langle 1, 1 | \right) |2, 1\rangle U_0^{(1)} V_{+1}^{(1)} = \frac{U_{+1}^{(1)} V_0^{(1)} + U_0^{(1)} V_{+1}^{(1)}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Now, using the same theorem, we compose the newly built rank-2 spherical tensor  $Z^{(2)}$  with the rank-1 spherical tensor  $W^{(1)}$ , to obtain a rank-3 spherical tensor,  $T^{(3)}$ . We need only the component  $T_{+2}^{(3)}$ , which is given by

$$\begin{aligned} T_{+2}^{(3)} &= \sum_{q_1=-2}^{+2} \sum_{q_2=-1}^{+1} \left( \langle 2, q_1 | \langle 1, q_2 | \right) |3, 2\rangle Z_{q_1}^{(2)} W_{q_2}^{(1)} \\ &= \left( \langle 2, 2 | \langle 1, 0 | \right) |3, 2\rangle Z_{+2}^{(2)} W_0^{(1)} + \left( \langle 2, 1 | \langle 1, 1 | \right) |3, 2\rangle Z_{+1}^{(2)} W_{+1}^{(1)} = \frac{Z_{+2}^{(2)} W_0^{(1)} + \sqrt{2} Z_{+1}^{(2)} W_{+1}^{(1)}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{U_{+1}^{(1)} V_{+1}^{(1)} W_0^{(1)} + U_{+1}^{(1)} V_0^{(1)} W_{+1}^{(1)} + U_0^{(1)} V_{+1}^{(1)} W_{+1}^{(1)}}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

2. i) Recalling that the dimension of a Dirac delta is equal to the inverse of the dimension of its argument, from the expression  $V = A z \delta(t)$ , we get that

$$[A] = \frac{[V] T}{[z]} = \frac{M L^2 T^{-2} T}{L} = \frac{M L}{T},$$

from which we see that  $A$  has the dimension of a linear momentum.

- ii) We have

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = (0, 0, -A\delta(t)),$$

*i.e.* an impulsive force acting only at  $t = 0$  along the  $z$ -axis. The amplitude of this impulse is just  $A$ .

- iii) To first order perturbation theory, the probability amplitude of the transition from the state  $|1, 0, 0\rangle$  at  $t = 0^-$  to the state  $|2, 1, m\rangle$  at  $t = 0^+$  is given by

$$\begin{aligned} c_{(1,0,0) \rightarrow (2,1,m)}^{(1)} &= \delta_{12} \delta_{01} \delta_{0m} + \frac{1}{i\hbar} \int_{0^-}^{0^+} dt \langle 2, 1, m | V(t) | 1, 0, 0 \rangle e^{i\omega_{21}t} \\ &= \frac{A}{i\hbar} \int_{0^-}^{0^+} dt \langle 2, 1, m | z | 1, 0, 0 \rangle \delta(t) e^{i\omega_{21}t}, \quad \omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}. \end{aligned}$$

Since the operator  $z$  behaves as the 0-component of a rank-1 spherical tensor, due to the  $m$ -selection rule, only for  $m = 0$  the transition amplitude can be different from zero. Then,

$$\begin{aligned}\langle 2, 1, 0 | z | 1, 0, 0 \rangle &= \int d\Omega \int_0^\infty r^2 dr R_{21}(r) [Y_0^1(\theta, \phi)]^* z R_{10}(r) Y_0^0(\theta, \phi) \\ &= \int d\Omega \int_0^\infty r^2 dr R_{21}(r) [Y_0^1(\theta, \phi)]^* r \cos \theta R_{10}(r) Y_0^0(\theta, \phi) \\ &= \int_0^\infty dr r^3 R_{21}(r) R_{10}(r) \cdot \int d\Omega \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \cos \theta \frac{1}{\sqrt{4\pi}} = \frac{128}{81} \sqrt{\frac{2}{3}} a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2^7 \sqrt{2}}{3^4},\end{aligned}$$

whereas

$$\int_{0^-}^{0^+} dt e^{i\omega_{21}t} \delta(t) = 1.$$

Hence, the first order transition probability turns to be

$$|c_{(1,0,0) \rightarrow (2,1,0)}^{(1)}|^2 = \frac{A^2}{\hbar^2} \frac{2^{15}}{3^8}.$$

The condition for the application of perturbation theory is that the absolute value of the matrix element of the operator  $V$  between the states 1s and 2s, which is of the order of  $|A|a/\omega_{21}$ , is much smaller than  $E_2 - E_1 = \hbar\omega_{21}$ .

3. Recalling the expression of the vector potential  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  in the Coulomb gauge,

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}, \lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}}} [\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}) a_{\vec{k}, \lambda}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}) a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}]$$

and using

$$\frac{da_{\vec{k}, \sigma}}{dt} = -i\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}, \sigma}, \quad \frac{da_{\vec{k}, \sigma}^\dagger}{dt} = i\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}, \sigma}^\dagger,$$

we get

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} = \sum_{\vec{k}, \lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}}} i\omega_{\vec{k}} [\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}) a_{\vec{k}, \lambda}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}) a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}]$$

and

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}, \lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}}} i\vec{k} \times [\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}) a_{\vec{k}, \lambda}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}) a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}].$$

Now, the expectation value of both  $\vec{E}$  and  $\vec{B}$  on the vacuum is zero, since they both depend linearly on creation and annihilation operators, whose vacuum expectation value vanishes. Therefore the dispersion of  $\vec{E}$  coincides with the expectation value of  $\vec{E}^2$  on the vacuum, and similarly for that of  $\vec{B}$ .

The operator  $\vec{E}^2$  contains terms of the form  $aa$ ,  $a^\dagger a^\dagger$  and  $a^\dagger a$ , whose vacuum expectation value vanishes. The only non-zero contribution comes from the term of the form  $aa^\dagger$ , which gives

$$\langle \vec{E}^2(\vec{x}, t) \rangle = \sum_{\vec{k}, \lambda} \sum_{\vec{k}', \lambda'} \frac{\hbar}{2\epsilon_0 V} \sqrt{\omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'}} \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \lambda} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}', \lambda'} e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}} \langle 0 | a_{\vec{k}, \lambda}(t) a_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger(t) | 0 \rangle.$$

Since

$$\langle 0 | a_{\vec{k}, \lambda}(t) a_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger(t) | 0 \rangle = \langle 0 | a_{\vec{k}, \lambda} e^{-i\omega_{\vec{k}} t} a_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger e^{i\omega_{\vec{k}'} t} | 0 \rangle$$

$$= e^{-i(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}'})t} \langle 0 | (\delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'} - a_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger a_{\vec{k}, \lambda}) | 0 \rangle = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'} ,$$

we obtain

$$\langle \vec{E}^2(\vec{x}, t) \rangle = \sum_{\vec{k}, \lambda} \frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 V} (\vec{\epsilon}_{\vec{k}, \lambda})^2 = \sum_{\vec{k}, \lambda} \frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 V} = \frac{1}{\epsilon_0 V} \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} .$$

The argument goes similarly for  $\vec{B}^2$  which turns to be

$$\langle \vec{B}^2(\vec{x}, t) \rangle = \sum_{\vec{k}, \lambda} \frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}} (\vec{k} \times \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \lambda})^2 = \sum_{\vec{k}, \lambda} \frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}} k^2 = \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{\epsilon_0 c^2 V} = \frac{\mu_0}{V} \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} .$$



## Appello straordinario, 6 aprile 2016

1. The  $y$  operator can be written as combination of rank-1 spherical tensors:  $T_{-1}^{(1)} + T_1^{(1)}$ . This implies that the matrix elements  $\langle \alpha', j', m'_j | y | \alpha, j = 3/2, m_j \rangle$  can be different from zero when

- $m'_j = m_j \pm 1$  ( $m$ -selection rule);
- $j'$  is one of the angular momentum values obtained in the composition of the angular momenta  $j = 3/2$  and  $1$  (Wigner-Eckart theorem); these values are  $5/2$ ,  $3/2$  and  $1/2$ .

Note that, in this case, the fact that the operator  $y$  is odd does not help, since the parity of the states entering the above matrix elements is not defined (they have not a defined value of the quantum number  $l$ ).

For  $j' = 3/2$  and  $m_j = 1/2$ , the only non-zero matrix elements are

$$\langle \alpha', j' = 3/2, m'_j = 3/2 | y | \alpha, j = 3/2, m_j = 1/2 \rangle$$

and

$$\langle \alpha', j' = 3/2, m'_j = -1/2 | y | \alpha, j = 3/2, m_j = 1/2 \rangle .$$

Their ratio can be calculated with the help of the Wigner-Eckart theorem:

$$\begin{aligned} & \frac{\langle \alpha', j' = 3/2, m'_j = 3/2 | y | \alpha, j = 3/2, m_j = 1/2 \rangle}{\langle \alpha', j' = 3/2, m'_j = -1/2 | y | \alpha, j = 3/2, m_j = 1/2 \rangle} \\ &= \frac{\langle \alpha', j' = 3/2, m'_j = 3/2 | T_1^{(1)} | \alpha, j = 3/2, m_j = 1/2 \rangle}{\langle \alpha', j' = 3/2, m'_j = -1/2 | T_{-1}^{(1)} | \alpha, j = 3/2, m_j = 1/2 \rangle} \\ &= \frac{\left( \langle 1, 1 | \langle 3/2, 1/2 | \right) | 3/2, 3/2 \rangle}{\left( \langle 1, -1 | \langle 3/2, 1/2 | \right) | 3/2, -1/2 \rangle} = \frac{-\sqrt{2/5}}{\sqrt{8/15}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} . \end{aligned}$$

Therefore, the ratio between the transition probability to the state with  $m'_j = 3/2$  and that to the state with  $m'_j = -1/2$  is equal to  $3/4$ .

2. i) Recalling that the dimension of a Dirac delta is equal to the inverse of the dimension of its argument, we get that

$$[A] = \frac{[V] T}{[z]} = \frac{M L^2 T^{-2} T}{L} = \frac{M L}{T} ,$$

from which we see that  $A$  has the dimension of a linear momentum.

ii) We have

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = (0, 0, -A(\delta(t + t_0) - \delta(t - t_0)) ,$$

*i.e.* two impulsive forces, acting at  $t = -t_0$  and at  $t = t_0$  along the  $z$ -axis. The amplitude of the impulses is  $A$ .

iii) To first order perturbation theory, the probability amplitude of the transition from the state  $|1, 0, 0\rangle$  at  $t = -\infty$  to the state  $|2, 1, m\rangle$  at  $t = +\infty$  is given by

$$\begin{aligned} c_{(1,0,0) \rightarrow (2,1,m)}^{(1)} &= \delta_{12} \delta_{01} \delta_{0m} + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle 2, 1, m | V(t) | 1, 0, 0 \rangle e^{i\omega_{21}t} \\ &= \frac{A}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle 2, 1, m | z | 1, 0, 0 \rangle (\delta(t + t_0) - \delta(t - t_0)) e^{i\omega_{21}t} , \quad \omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} . \end{aligned}$$

Since the operator  $z$  behaves as the 0-component of a rank-1 spherical tensor, due to the  $m$ -selection rule, only for  $m = 0$  the transition amplitude can be different from zero. From Problem 2 of 25 febbraio 2016 we know that

$$\langle 2, 1, 0 | z | 1, 0, 0 \rangle = \frac{2^7 \sqrt{2}}{3^4} .$$

Moreover

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega_{21}t} (\delta(t + t_0) - \delta(t - t_0)) = e^{-i\omega_{21}t_0} - e^{i\omega_{21}t_0} = -2i \sin(\omega_{21}t_0) .$$

Hence, the first order transition probability turns to be

$$|c_{(1,0,0) \rightarrow (2,1,0)}^{(1)}|^2 = \frac{A^2}{\hbar^2} \frac{2^{15}}{3^8} 4 \sin^2(\omega_{21}t_0) .$$

The condition for the application of perturbation theory is that the absolute value of the matrix element of the operator  $V$  between the states 1s and 2s, which is of the order of  $|A|a/\omega_{21}$ , is much smaller than  $E_2 - E_1 = \hbar\omega_{21}$ .

3. The calculation of the lifetime  $\tau$  of a generic excited state with respect to the decay into another state, in the dipole approximation, is presented in the Section 2.2 of Greiner, *Quantum Mechanics - Special chapters*. Since the question is about the direction of the emitted photon, no matter what is its polarization, we should look at the expression of  $\tau$  *before* the integration over the angles  $\theta$  and  $\phi$  giving the direction of motion of the emitted photon. Taking into account Eqs. (2.17) and (2.18) of Greiner's book, we have, in the dipole approximation, that

$$\frac{d\left(\frac{1}{\tau}\right)}{d\theta d\phi} \propto \sin\theta \sum_{\sigma=1,2} |\vec{\epsilon}_{\vec{k},\sigma} \cdot \langle 1, 0, 0 | \vec{p} | 2, 1, 1 \rangle|^2 ,$$

where  $\vec{\epsilon}_{\vec{k},1}$  and  $\vec{\epsilon}_{\vec{k},2}$  denote the two polarization states of the emitted photon. The fact that the initial atomic state has a definite value for the magnetic quantum number  $m$  means that the electron of the hydrogen atom has a definite value for the component of its orbital angular momentum along some previously specified  $z$ -direction. This direction will determine the polar axis of our system of spherical coordinates. If we fix arbitrarily the direction of the  $x$ -axis in the plane orthogonal to this  $z$ -direction, we can write the generic momentum vector of the emitted photon as

$$\vec{k} = |\vec{k}| (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$$

and choose the polarization vectors as

$$\epsilon_{\vec{k},1} = (\cos\theta \cos\phi, \cos\theta \sin\phi, -\sin\theta) , \quad \epsilon_{\vec{k},2} = (-\sin\phi, \cos\phi, 0) ,$$

so that  $\vec{\epsilon}_{\vec{k},1}$  and  $\vec{\epsilon}_{\vec{k},2}$  are normalized to one, mutually orthogonal, and orthogonal to  $\vec{k}$ .

Let us evaluate now the components of the vector  $\langle 1, 0, 0 | \vec{p} | 2, 1, 1 \rangle$ . The  $z$ -component of this vector is zero due to the  $m$ -selection rule, since  $p_z$  can be written as the zero component of a rank-1 spherical tensor. The  $x$ - and  $y$ -components are given by

$$\begin{aligned} \langle 1, 0, 0 | p_x | 2, 1, 1 \rangle &= \frac{m}{i\hbar} \langle 1, 0, 0 | [x, H_m] | 2, 1, 1 \rangle = m \frac{E_2 - E_1}{i\hbar} \langle 1, 0, 0 | x | 2, 1, 1 \rangle \\ &\equiv -im\omega_{21} \langle 1, 0, 0 | x | 2, 1, 1 \rangle \end{aligned}$$

and

$$\langle 1, 0, 0 | p_y | 2, 1, 1 \rangle = \frac{m}{i\hbar} \langle 1, 0, 0 | [y, H_m] | 2, 1, 1 \rangle = m \frac{E_2 - E_1}{i\hbar} \langle 1, 0, 0 | y | 2, 1, 1 \rangle$$

$$\equiv -im\omega_{21}\langle 1, 0, 0|y|2, 1, 1\rangle ,$$

where  $H_m$  is the Hamiltonian of the hydrogen atom. The matrix element  $\langle 1, 0, 0|x|2, 1, 1\rangle$  can be obtained from the calculation in Problem 2 of 21 luglio 2015,

$$\langle 1, 0, 0|x|2, 1, 1\rangle = -a\frac{2^7}{3^5} .$$

The matrix element  $\langle 1, 0, 0|y|2, 1, 1\rangle$  can be obtained similarly and turns to be

$$\langle 1, 0, 0|y|2, 1, 1\rangle = ia\frac{2^7}{3^5} .$$

So, finally, we have

$$\langle 1, 0, 0|\vec{p}|2, 1, 1\rangle = A(i, 1, 0) , \quad A \equiv ma\omega_{21}\frac{2^7}{3^5} .$$

Then,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=1,2} |\vec{\epsilon}_{\vec{k},\sigma} \cdot \langle 1, 0, 0|\vec{p}|2, 1, 1\rangle|^2 &= A^2 \left[ |\vec{\epsilon}_{\vec{k},1} \cdot \langle 1, 0, 0|\vec{p}|2, 1, 1\rangle|^2 + |\vec{\epsilon}_{\vec{k},2} \cdot \langle 1, 0, 0|\vec{p}|2, 1, 1\rangle|^2 \right] \\ &= A^2 \left( |i \cos \theta e^{i\phi}|^2 + |e^{i\phi}|^2 \right) = A^2 (\cos^2 \theta + 1) \end{aligned}$$

and, hence,

$$\frac{d\left(\frac{1}{\tau}\right)}{d\theta d\phi} \propto \sin \theta (1 + \cos^2 \theta) ,$$

which takes its maxima for  $\cos \theta = 1/3$  and  $\cos \theta = -1/3$ , independently of the value of  $\phi$ . The position vector of the detector should therefore form with the  $z$ -axis an angle  $\theta$  such that  $\cos \theta = \pm 1/3$ .

## Appello di recupero, 16 giugno 2016

1. The  $x$  operator can be written as combination of rank-1 spherical tensors:  $T_{-1}^{(1)} - T_1^{(1)}$ . This implies that the matrix elements  $\langle \alpha', j', m'_j | x | \alpha, j = 1/2, m_j \rangle$  can be different from zero when

- $m'_j = m_j \pm 1$  ( $m$ -selection rule);
- $j'$  is one of the angular momentum values obtained in the composition of the angular momenta  $j = 1/2$  and 1 (Wigner-Eckart theorem); these values are  $3/2$  and  $1/2$ .

Note that, in this case, the fact that the operator  $x$  is odd does not help, since the parity of the states entering the above matrix elements is not defined (they have not a defined value of the quantum number  $l$ ).

For  $j' = 3/2$  and  $m_j = -1/2$ , the only non-zero matrix elements are

$$\langle \alpha', j' = 3/2, m'_j = 1/2 | x | \alpha, j = 1/2, m_j = -1/2 \rangle$$

and

$$\langle \alpha', j' = 3/2, m'_j = -3/2 | x | \alpha, j = 1/2, m_j = -1/2 \rangle .$$

Their ratio can be calculated with the help of the Wigner-Eckart theorem:

$$\begin{aligned} & \frac{\langle \alpha', j' = 3/2, m'_j = 1/2 | x | \alpha, j = 1/2, m_j = -1/2 \rangle}{\langle \alpha', j' = 3/2, m'_j = -3/2 | x | \alpha, j = 1/2, m_j = -1/2 \rangle} \\ &= \frac{\langle \alpha', j' = 3/2, m'_j = 1/2 | -T_1^{(1)} | \alpha, j = 1/2, m_j = -1/2 \rangle}{\langle \alpha', j' = 3/2, m'_j = -3/2 | T_{-1}^{(1)} | \alpha, j = 1/2, m_j = -1/2 \rangle} \\ &= -\frac{\left( \langle 1, 1 | \langle 1/2, -1/2 | \right) | 3/2, 1/2 \rangle}{\left( \langle 1, -1 | \langle 1/2, -1/2 | \right) | 3/2, -3/2 \rangle} = -\frac{\sqrt{1/3}}{1} = -\frac{1}{\sqrt{3}} . \end{aligned}$$

Therefore, the ratio between the transition probability to the state with  $m'_j = 1/2$  and that to the state with  $m'_j = -3/2$  is equal to  $1/3$ .

2. The condition for the applicability of perturbation theory is that  $A$  is small enough that the matrix elements of  $V(t)$  between unperturbed states are, in absolute value, much smaller than the typical energy separation between these states. This means that  $|A|a \ll e^2/(4\pi\epsilon_0 a)$ , where  $a$  is the Bohr radius.

To first order perturbation theory, the probability amplitude of the transition from the state  $|1s\rangle \equiv |n = 1, l = 0, m = 0\rangle$  at  $t = 0$  to the generic 3p state  $|n = 3, l = 1, m\rangle$  at  $t = +\infty$  is given by

$$\begin{aligned} c_{(1,0,0) \rightarrow (3,1,m)}^{(1)} &= \delta_{13} \delta_{01} \delta_{0m} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^{+\infty} dt \langle 3, 1, m | V(t) | 1, 0, 0 \rangle e^{i\omega_{31}t} \\ &= \frac{A}{i\hbar} \int_0^{t_0} dt \langle 3, 1, m | x | 1, 0, 0 \rangle e^{i\omega_{31}t} , \quad \omega_{31} = \frac{E_3 - E_1}{\hbar} , \end{aligned}$$

where  $E_3$  and  $E_1$  denote, respectively, the energy of the states  $|n = 3, l = 1, m\rangle$  and  $1s$ . Now, since  $x$  is a linear combination of the spherical tensors  $T_{-1}^{(1)}$  and  $T_1^{(1)}$ , due to the  $m$ -selection rule, the only non-zero matrix elements are

$$\langle 3, 1, \pm 1 | x | 1, 0, 0 \rangle = \int d\Omega \int_0^\infty r^2 dr R_{31}(r) [Y_{\pm 1}^1(\theta, \phi)]^* r \sin \theta \cos \phi R_{10}(r) Y_0^0(\theta, \phi)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty dr r^3 R_{31}(r) R_{10}(r) \cdot \int d\Omega (\mp) \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\mp i\phi} \sin \theta \cos \phi \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\
&= \frac{27}{64} \sqrt{\frac{3}{2}} a \cdot (\mp) \frac{1}{\sqrt{6}},
\end{aligned}$$

whereas

$$\int_0^{t_0} dt e^{i\omega_{31}t} = \frac{1}{i\omega_{31}} (e^{i\omega_{31}t_0} - 1).$$

Putting everything together, one gets for the transition probability

$$|c_{(1,0,0) \rightarrow (3,1,\pm 1)}^{(1)}|^2 = \frac{A^2}{\hbar^2 \omega_{31}^2} \frac{3^6}{2^{12}} a^2 \sin^2 \left( \frac{\omega_{31} t_0}{2} \right).$$

3. The formula for the lifetime  $\tau$  of a generic excited state with respect to the decay into another state, in the dipole approximation and by emission of one photon, is given by Eq. (2.32) in the Section 2.2 of Greiner, *Quantum Mechanics - Special chapters* and reads, in the International Systems of Units:

$$\left( \frac{1}{\tau} \right)_{i \rightarrow f} = \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right) \frac{4\omega_{fi}^3}{3c^2} |\langle a_f | \hat{r} | a_i \rangle|^2,$$

where the indices  $i$  and  $f$  refer to the initial and final states, respectively,  $|a_i\rangle$ ,  $|a_f\rangle$  denote the initial and final atomic states, while  $\omega_{fi} = (E_f - E_i)/\hbar$ .

Since the components of the  $\vec{r}$  operator can be written as linear combinations of those of a rank-1 spherical tensor, due to the Wigner-Eckart theorem, the initial state must have  $l = 1$ , *i.e.* it must be a 3p state.

Hence,

$$|a_i\rangle = |3p, m\rangle = |3, 1, m\rangle, \quad |a_f\rangle = |1s\rangle = |1, 0, 0\rangle, \quad \hbar\omega_{fi} = E_{1s} - E_{3p} = \frac{4}{9a} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}.$$

We need to calculate the three components of  $\langle 1, 0, 0 | \hat{r} | 3, 1, m \rangle$ . We consider separately the two cases  $m = \pm 1$  and  $m = 0$ .

i) For  $m = \pm 1$ ,  $\langle 1, 0, 0 | \hat{z} | 3, 1, \pm 1 \rangle$  is trivially zero, since the operator  $\hat{z}$  behaves as the 0-component of a rank-1 tensor and the given matrix element has  $m' \neq m$ . We are therefore left with  $\langle 1, 0, 0 | \hat{x} | 3, 1, \pm 1 \rangle$  and  $\langle 1, 0, 0 | \hat{y} | 3, 1, \pm 1 \rangle$ :

$$\begin{aligned}
\langle 1, 0, 0 | \hat{x} | 3, 1, \pm 1 \rangle &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\infty r^2 dr R_{10}(r) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} r \sin \theta \cos \phi R_{31}(r) (\mp) \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi} \\
&= \mp \frac{27}{128} a,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle 1, 0, 0 | \hat{y} | 3, 1, \pm 1 \rangle &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\infty r^2 dr R_{10}(r) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} r \sin \theta \sin \phi R_{31}(r) (\mp) \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi} \\
&= -i \frac{27}{128} a.
\end{aligned}$$

In this case,

$$\left( \frac{1}{\tau} \right)_{(3p, m=\pm 1) \rightarrow 1s} = \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right) \frac{4}{3c^2} \left( \frac{4c}{9a} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right)^3 2 \left( \frac{27}{128} \right)^2 a^2 = \frac{1}{96} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right)^4 \frac{c}{a}.$$

ii) For  $m = 0$ , instead, only  $\langle 1, 0, 0 | \hat{z} | 3, 1, 0 \rangle$  contributes:

$$\begin{aligned} \langle 1, 0, 0 | \hat{z} | 3, 1, 0 \rangle &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\infty r^2 dr R_{10}(r) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} r \cos \theta R_{31}(r) \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ &= \frac{27}{128} \sqrt{2} a, \end{aligned}$$

so that

$$\left( \frac{1}{\tau} \right)_{(3p, m=0) \rightarrow 1s} = \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right) \frac{4}{3c^2} \left( \frac{4c}{9a} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right)^3 2 \left( \frac{27}{128} \right)^2 a^2 = \frac{1}{96} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right)^4 \frac{c}{a},$$

just as in the previous case.

## Appello di recupero, 7 luglio 2016

1. The task of building a rank-3 spherical tensor using only the components of the position operator  $\vec{x}$  would be trivial if we had the expression for the spherical harmonics with  $l = 3$ . Since they are not given in the table allowed for consultation, we first build a rank-2 and a rank-1 spherical tensor using only the  $\vec{x}$  operator:

$$\begin{aligned} X_{\pm 2}^{(2)} &= \frac{1}{2}(x \pm iy)^2, \\ X_{\pm 1}^{(2)} &= \mp(x \pm iy)z, \\ X_0^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(3z^2 - r^2), \end{aligned}$$

(see Problem 2 of 13 settembre 2006) and

$$\begin{aligned} Z_{\pm 1}^{(1)} &= \mp \frac{x \pm iy}{\sqrt{2}}, \\ Z_{\pm 0}^{(1)} &= z. \end{aligned}$$

Then, we use the theorem (3.10.27) of Sakurai, to build a rank-3 spherical tensor through the above-defined rank-2 and a rank-1 spherical tensors:

$$\begin{aligned} T_{+3}^{(3)} &= \sum_{q_1=-2}^{+2} \sum_{q_2=-1}^{+1} \left( \langle 2, q_1 | \langle 1, q_2 | \right) |3, 3\rangle X_{q_1}^{(2)} Z_{q_2}^{(1)} = \left( \langle 2, 2 | \langle 1, 1 | \right) |3, 3\rangle X_{+2}^{(2)} Z_{+1}^{(1)} = X_{+2}^{(2)} Z_{+1}^{(1)}, \\ T_{+2}^{(3)} &= \sum_{q_1=-2}^{+2} \sum_{q_2=-1}^{+1} \left( \langle 2, q_1 | \langle 1, q_2 | \right) |3, 2\rangle X_{q_1}^{(2)} Z_{q_2}^{(1)} \\ &= \left( \langle 2, 2 | \langle 1, 0 | \right) |3, 2\rangle X_{+2}^{(2)} Z_0^{(1)} + \left( \langle 2, 1 | \langle 1, 1 | \right) |3, 2\rangle X_{+1}^{(2)} Z_{+1}^{(1)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} X_{+2}^{(2)} Z_0^{(1)} + \sqrt{\frac{2}{3}} X_{+1}^{(2)} Z_{+1}^{(1)}, \\ T_{+1}^{(3)} &= \sum_{q_1=-2}^{+2} \sum_{q_2=-1}^{+1} \left( \langle 2, q_1 | \langle 1, q_2 | \right) |3, 1\rangle X_{q_1}^{(2)} Z_{q_2}^{(1)} \\ &= \left( \langle 2, 2 | \langle 1, -1 | \right) |3, 1\rangle X_{+2}^{(2)} Z_{-1}^{(1)} + \left( \langle 2, 1 | \langle 1, 0 | \right) |3, 1\rangle X_{+1}^{(2)} Z_0^{(1)} \\ &+ \left( \langle 2, 0 | \langle 1, 1 | \right) |3, 1\rangle X_0^{(2)} Z_{+1}^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{15}} X_{+2}^{(2)} Z_{-1}^{(1)} + \sqrt{\frac{8}{15}} X_{+1}^{(2)} Z_0^{(1)} + \sqrt{\frac{2}{5}} X_0^{(2)} Y_{+1}^{(2)}, \\ T_0^{(3)} &= \sum_{q_1=-2}^{+2} \sum_{q_2=-1}^{+1} \left( \langle 2, q_1 | \langle 1, q_2 | \right) |3, 0\rangle X_{q_1}^{(2)} Z_{q_2}^{(1)} \\ &= \left( \langle 2, 1 | \langle 1, -1 | \right) |3, 0\rangle X_{+1}^{(2)} Z_{-1}^{(1)} + \left( \langle 2, 0 | \langle 1, 0 | \right) |3, 0\rangle X_0^{(2)} Z_0^{(1)} \\ &+ \left( \langle 2, -1 | \langle 1, 1 | \right) |3, 0\rangle X_{-1}^{(2)} Z_{+1}^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{5}} X_{+1}^{(2)} Z_{-1}^{(1)} + \sqrt{\frac{3}{5}} X_0^{(2)} Z_0^{(1)} + \sqrt{\frac{1}{5}} X_{-1}^{(2)} Y_{+1}^{(2)}, \end{aligned}$$

and so on.

2. To first order perturbation theory, the probability amplitude of the transition from the state  $|1s\rangle|+\rangle \equiv |n=1, l=0, m=0, m_s=1/2\rangle$  at  $t=0$  to the generic state  $|n=2, l, m, m_s\rangle$  at

$t = +\infty$  is given by

$$\begin{aligned} c_{(1,0,0,1/2) \rightarrow (2,l,m,m_s)}^{(1)} &= \delta_{12} \delta_{0l} \delta_{0m} \delta_{1/2m_s} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^{+\infty} dt \langle 2, l, m, m_s | V(t) | 1, 0, 0, 1/2 \rangle e^{i\omega_{21}t} \\ &= \frac{A}{i\hbar} \int_0^{t_0} dt \langle 2, l, m, m_s | x S_z | 1, 0, 0, 1/2 \rangle e^{i\omega_{21}t}, \quad \omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}, \end{aligned}$$

where  $E_2$  and  $E_1$  denote, respectively, the energy of the states  $|n = 2, l, m, m_s\rangle$  and  $1s$ . Then,

$$\langle 2, l, m, m_s | x S_z | 1, 0, 0, 1/2 \rangle = \langle 2, l, m | x | 1, 0, 0 \rangle \langle m_s | S_z | 1/2 \rangle = \langle 2, l, m | x | 1, 0, 0 \rangle \frac{\hbar}{2} \delta_{1/2m_s},$$

which means that the state with  $n = 2$  must also have the spin of the electron along the positive  $z$ -axis. Moreover, due to the Wigner-Eckart theorem and the  $m$ -selection rule, the matrix element of the  $x$  operator must have  $l = 1$  and  $m = \pm 1$ :

$$\begin{aligned} \langle 2, 1, \pm 1 | x | 1, 0, 0 \rangle &= \int d\Omega \int_0^\infty r^2 dr R_{21}(r) [Y_{\pm 1}^1(\theta, \phi)]^* r \sin \theta \cos \phi R_{10}(r) Y_0^0(\theta, \phi) \\ &= \int_0^\infty dr r^3 R_{21}(r) R_{10}(r) \cdot \int d\Omega (\mp) \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\mp i\phi} \sin \theta \cos \phi \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\ &= a \frac{128}{81} \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (\mp) \sqrt{\frac{1}{6}} = \mp a \frac{128}{243} = \mp a \frac{2^7}{3^5}, \end{aligned}$$

whereas

$$\int_0^{t_0} dt e^{i\omega_{21}t} = \frac{1}{i\omega_{21}} (e^{i\omega_{21}t_0} - 1).$$

Putting everything together, one gets for the transition probability

$$|c_{(1,0,0,1/2) \rightarrow (2,1,\pm 1,1/2)}^{(1)}|^2 = \left[ \frac{Aa}{\omega_{21}} \frac{2^6}{3^5} \right]^2 4 \sin^2 \left( \frac{\omega_{21}t_0}{2} \right).$$

3. The formula for the lifetime  $\tau$  of a generic excited state with respect to the decay into another state, in the dipole approximation and by emission of one photon, is given by Eq. (2.32) in the Section 2.2 of Greiner, *Quantum Mechanics - Special chapters* and reads, in the International Systems of Units:

$$\left( \frac{1}{\tau} \right)_{i \rightarrow f} = \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \right) \frac{4\omega_{fi}^3}{3c^2} |\langle a_f | \hat{r} | a_i \rangle|^2,$$

where the indices  $i$  and  $f$  refer to the initial and final states, respectively,  $|a_i\rangle$ ,  $|a_f\rangle$  denote the initial and final states, while  $\omega_{fi} = (E_f - E_i)/\hbar$ .

In the present case,

$$|a_i\rangle = |n_x = 0, n_y = 0, n_z = 1\rangle, \quad |a_f\rangle = |n_x = 0, n_y = 0, n_z = 0\rangle, \quad \hbar\omega_{fi} = E_{100} - E_{000} = \hbar\omega,$$

where  $\omega$  is the frequency of the harmonic oscillator. Of the three components of  $\langle n_x = 0, n_y = 0, n_z = 0 | \hat{r} | n_x = 0, n_y = 0, n_z = 1 \rangle$ , the only non-zero one is the third:

$$\langle n_x = 0, n_y = 0, n_z = 0 | z | n_x = 0, n_y = 0, n_z = 1 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}.$$

So, we get

$$\left( \frac{1}{\tau} \right)_{(0,0,1) \rightarrow (0,0,0)} = \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \right) \frac{4}{3c^2} \omega^3 \frac{\hbar}{2m\omega} = \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \right) \frac{2}{3mc^2} \hbar\omega^2.$$



## Appello di recupero, 15 settembre 2016

1. The natural way to define this tensor is to take the scalar product between  $\vec{u}$  and  $\vec{v}$ :

$$T^{(0)} = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

We must check that the defining commutation relations are satisfied, *i.e.* that

$$[J_z, T^{(0)}] = 0, \quad [J_{\pm}, T^{(0)}] = 0,$$

assuming as valid the commutation relations for rank-1 tensors:

$$[J_z, T_q^{(1)}] = \hbar q T_q^{(1)}, \quad [J_{\pm}, T_q^{(1)}] = \hbar \sqrt{(1 \mp q)(1 \pm q + 1)} T_{q \pm 1}^{(1)},$$

where  $T_q^{(1)}$  stands for  $U_q^{(1)}$  or  $V_q^{(1)}$ , with

$$\begin{aligned} U_0^{(1)} &= u_z, & U_{\pm 1}^{(1)} &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(u_x \pm i u_y), \\ V_0^{(1)} &= v_z, & V_{\pm 1}^{(1)} &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(v_x \pm i v_y). \end{aligned}$$

First of all, let us rewrite  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  in terms of the components of the tensors  $U^{(1)}$  and  $V^{(1)}$ ,

$$T^{(0)} = \vec{u} \cdot \vec{v} = U_0^{(1)} V_0^{(1)} - U_{+1}^{(1)} V_{-1}^{(1)} - U_{-1}^{(1)} V_{+1}^{(1)},$$

then

$$\begin{aligned} [J_z, T^{(0)}] &= [J_z, U_0^{(1)} V_0^{(1)} - U_{+1}^{(1)} V_{-1}^{(1)} - U_{-1}^{(1)} V_{+1}^{(1)}] \\ &= U_0^{(1)} [J_z, V_0^{(1)}] + [J_z, U_0^{(1)}] V_0^{(1)} - U_{+1}^{(1)} [J_z, V_{-1}^{(1)}] - [J_z, U_{+1}^{(1)}] V_{-1}^{(1)} \\ &\quad - U_{-1}^{(1)} [J_z, V_{+1}^{(1)}] - [J_z, U_{-1}^{(1)}] V_{+1}^{(1)} \\ &= 0 + 0 - U_{+1}^{(1)} (-\hbar V_{-1}^{(1)}) - (\hbar U_{+1}^{(1)}) V_{-1}^{(1)} - U_{-1}^{(1)} (\hbar V_{+1}^{(1)}) - (-\hbar U_{-1}^{(1)}) V_{+1}^{(1)} = 0. \end{aligned}$$

Similarly one can check that also the other commutation relation,  $[J_{\pm}, T^{(0)}] = 0$  is satisfied.

2. To first order perturbation theory, the probability amplitude of the transition from the state  $|1s\rangle|+\rangle \equiv |n=1, l=0, m=0, m_s=1/2\rangle$  at  $t=0$  to the generic state  $|n=2, l, m, m_s\rangle$  at  $t=+\infty$  is given by

$$\begin{aligned} c_{(1,0,0,1/2) \rightarrow (2,l,m,m_s)}^{(1)} &= \delta_{12} \delta_{0l} \delta_{0m} \delta_{1/2 m_s} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^{+\infty} dt \langle 2, l, m, m_s | V(t) | 1, 0, 0, 1/2 \rangle e^{i\omega_{21}t} \\ &= \frac{A}{i\hbar} \int_0^{t_0} dt \langle 2, l, m, m_s | z S_x | 1, 0, 0, 1/2 \rangle e^{i\omega_{21}t}, \quad \omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}, \end{aligned}$$

where  $E_2$  and  $E_1$  denote, respectively, the energy of the states  $|n=2, l, m, m_s\rangle$  and  $1s$ . Then,

$$\langle 2, l, m, m_s | z S_x | 1, 0, 0, 1/2 \rangle = \langle 2, l, m | z | 1, 0, 0 \rangle \langle m_s | S_x | 1/2 \rangle = \langle 2, l, m | z | 1, 0, 0 \rangle \frac{\hbar}{2} \delta_{-1/2 m_s},$$

which means that the state with  $n=2$  must also have the spin of the electron along the negative  $z$ -axis. Moreover, due to the Wigner-Eckart theorem and the  $m$ -selection rule, the matrix element of the  $x$  operator must have  $l=1$  and  $m=0$ :

$$\langle 2, 1, 0 | z | 1, 0, 0 \rangle = \int d\Omega \int_0^{\infty} r^2 dr R_{21}(r) [Y_0^1(\theta, \phi)]^* r \cos \theta R_{10}(r) Y_0^0(\theta, \phi)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty dr r^3 R_{21}(r) R_{10}(r) \cdot \int d\Omega \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \cos \theta \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\
&= a \frac{128}{81} \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = a \frac{2^7}{3^5} \cdot \sqrt{2},
\end{aligned}$$

whereas

$$\int_0^{t_0} dt e^{i\omega_{21}t} = \frac{1}{i\omega_{21}} (e^{i\omega_{21}t_0} - 1).$$

Putting everything together, one gets for the transition probability

$$|c_{(1,0,0,1/2) \rightarrow (2,1,0,-1/2)}^{(1)}|^2 = \left[ \frac{Aa}{\omega_{21}} \frac{2^7}{3^5} \sqrt{2} \right]^2 4 \sin^2 \left( \frac{\omega_{21}t_0}{2} \right).$$

3. The formula for the lifetime  $\tau$  of a generic excited state with respect to the decay into another state, in the dipole approximation and by emission of one photon, is given by Eq. (2.32) in the Section 2.2 of Greiner, *Quantum Mechanics - Special chapters* and reads, in the International Systems of Units:

$$\left( \frac{1}{\tau} \right)_{i \rightarrow f} = \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \right) \frac{4\omega_{fi}^3}{3c^2} |\langle a_f | \hat{r} | a_i \rangle|^2,$$

where the indices  $i$  and  $f$  refer to the initial and final states, respectively,  $|a_i\rangle$ ,  $|a_f\rangle$  denote the initial and final states, while  $\omega_{fi} = (E_f - E_i)/\hbar$ .

In the present case,

$$|a_i\rangle = |n_x = 1, n_y = 1, n_z = 2\rangle, \quad |a_f\rangle = |n_x = 1, n_y = 1, n_z = 1\rangle,$$

$$\hbar\omega_{fi} = E_{112} - E_{111} = \frac{3\hbar^2}{8mL^2} = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2mL^2}.$$

Of the three components of  $\langle n_x = 1, n_y = 1, n_z = 1 | \hat{r} | n_x = 1, n_y = 1, n_z = 2 \rangle$ , due to orthogonality in the 1-dimensional subspaces, the only non-zero one is the third:

$$\begin{aligned}
\langle n_x = 1, n_y = 1, n_z = 1 | z | n_x = 1, n_y = 1, n_z = 2 \rangle &= \int_0^L dz \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi}{L}z\right) z \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi}{L}z\right) \\
&= -\frac{16}{9\pi^2}L.
\end{aligned}$$

So, we get

$$\left( \frac{1}{\tau} \right)_{(1,1,2) \rightarrow (1,1,1)} = \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \right) \frac{4}{3c^2} \left( \frac{3\hbar\pi^2}{2mL^2} \right)^3 \left( -\frac{16}{9\pi^2}L \right)^2 = \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \right) \frac{\pi^2\hbar^3}{m^2c^2L^4} \frac{2^7}{3^2}.$$

## Appello straordinario, 2 novembre 2016

1. The defining commutation relations for a rank-1 spherical tensor are

$$[J_z, T_q^{(1)}] = \hbar q T_q^{(1)}, \quad [J_{\pm}, T_q^{(1)}] = \hbar \sqrt{(1 \mp q)(1 \pm q + 1)} T_{q\pm 1}^{(1)},$$

therefore, e.g.,

$$\begin{aligned} [J_z, T_x] &= \left[ J_z, \frac{T_{-1}^{(1)} - T_1^{(1)}}{\sqrt{2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} [J_z, T_{-1}^{(1)}] - \frac{1}{\sqrt{2}} [J_z, T_1^{(1)}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar (-1) T_{-1}^{(1)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar T_1^{(1)} \\ &= i\hbar \cdot i \frac{T_{-1}^{(1)} + T_1^{(1)}}{\sqrt{2}} = i\hbar T_y. \end{aligned}$$

Similarly one can find that

$$[J_z, T_y] = -i\hbar T_x, \quad [J_z, T_z] = 0.$$

Let's calculate another commutator:

$$\begin{aligned} [J_x, T_y] &= \left[ \frac{J_+ + J_-}{2}, i \frac{T_{-1}^{(1)} + T_1^{(1)}}{\sqrt{2}} \right] \\ &= \frac{i}{2\sqrt{2}} [J_+, T_{-1}^{(1)}] + \frac{i}{2\sqrt{2}} [J_+, T_1^{(1)}] + \frac{i}{2\sqrt{2}} [J_-, T_{-1}^{(1)}] + \frac{i}{2\sqrt{2}} [J_-, T_1^{(1)}] \\ &= \frac{i}{2\sqrt{2}} \hbar \sqrt{2} T_0^{(1)} + \frac{i}{2\sqrt{2}} \cdot 0 + \frac{i}{2\sqrt{2}} \cdot 0 + \frac{i}{2\sqrt{2}} \hbar \sqrt{2} T_0^{(1)} = i\hbar T_0^{(1)} = i\hbar T_z. \end{aligned}$$

Similarly one can find that

$$[J_x, T_z] = -i\hbar T_y, \quad [J_x, T_x] = 0$$

and

$$[J_y, T_x] = -i\hbar T_z, \quad [J_y, T_y] = 0, \quad [J_y, T_z] = i\hbar T_x.$$

2. To first order perturbation theory, the probability amplitude of the transition from the state  $|1s\rangle \equiv |1, 0, 0\rangle$  at  $t = -\infty$  to a generic state  $|n, l, m\rangle$  at  $t = +\infty$  is given by

$$\begin{aligned} c_{(1,0,0) \rightarrow (n,l,m)}^{(1)} &= \delta_{1n} \delta_{0l} \delta_{0m} + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle n, l, m | V(t) | 1, 0, 0 \rangle e^{i\omega_{n1}t} \\ &= \delta_{1n} \delta_{0l} \delta_{0m} + \frac{A}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \delta(t) \langle n, l, m | xy | 1, 0, 0 \rangle e^{i\omega_{n1}t} \\ &= \delta_{1n} \delta_{0l} \delta_{0m} + \frac{A}{i\hbar} \langle n, l, m | xy | 1, 0, 0 \rangle, \quad \omega_{n1} = \frac{E_n - E_1}{\hbar}, \end{aligned}$$

where  $E_n$  and  $E_1$  denote, respectively, the energy of the states  $|n, l, m\rangle$  and  $1s$ .

Now, the  $xy$  operator is parity-even and can be written as combination of rank-2 spherical tensors:  $T_{+2}^{(2)} - T_{-2}^{(2)}$ . This implies that the matrix elements  $\langle n, l, m | xy | 1, 0, 0 \rangle$  can be different from zero when

- $m = \pm 2$  ( $m$ -selection rule);
- $l$  is one of the angular momentum values obtained in the composition of the angular momenta 0 and 2 (Wigner-Eckart theorem), therefore it can only be  $l = 2$  (this is automatically compatible with the parity rule).

As a consequence, the final state can be any of the states of the type  $|n \geq 3, 2, \pm 2\rangle$ .

Then,

$$\begin{aligned} \langle n, 2, \pm 2 | xy | 1, 0, 0 \rangle &= \int d\Omega \int_0^\infty r^2 dr R_{n2}(r) [Y_2^2(\theta, \phi)]^* r^2 \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi R_{10}(r) Y_0^0(\theta, \phi) \\ &= \int_0^\infty dr r^4 R_{n2}(r) R_{10}(r) \cdot \int d\Omega \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\phi} \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\ &= \pm \frac{1}{i\sqrt{30}} \int_0^\infty dr r^4 R_{n2}(r) R_{10}(r) \equiv \pm \frac{1}{i\sqrt{30}} I_r . \end{aligned}$$

Hence,

$$|c_{(1,0,0) \rightarrow (n,2,\pm 2)}^{(1)}|^2 = \frac{A^2}{30} I_r^2 .$$

3. The formula for the lifetime  $\tau$  of a generic excited state with respect to the decay into another state, in the dipole approximation and by emission of one photon, is given by Eq. (2.32) in the Section 2.2 of Greiner, *Quantum Mechanics - Special chapters* and reads, in the International Systems of Units:

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)_{i \rightarrow f} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right) \frac{4\omega_{fi}^3}{3c^2} |\langle a_f | \hat{r} | a_i \rangle|^2 ,$$

where the indices  $i$  and  $f$  refer to the initial and final states, respectively,  $|a_i\rangle$ ,  $|a_f\rangle$  denote the initial and final states, while  $\omega_{fi} = (E_f - E_i)/\hbar$ .

In the present case,

$$\begin{aligned} |a_i\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |n_x = 1, n_y = 0, n_z = 0\rangle + |n_x = 0, n_y = 1, n_z = 0\rangle \right) , \\ |a_f\rangle &= |n_x = 0, n_y = 0, n_z = 0\rangle , \quad \hbar\omega_{fi} = E_{100} - E_{000} = \hbar\omega , \end{aligned}$$

where  $\omega$  is the frequency of the harmonic oscillator (notice that the initial state is an eigenstate of the matter Hamiltonian, being the combination of eigenstates with the same energy of the matter system). Of the three components of  $\langle a_f | \hat{r} | a_i \rangle$ , the non-zero ones are the first and the second:

$$\begin{aligned} \langle a_f | x | a_i \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle n_x = 0, n_y = 0, n_z = 0 | x | n_x = 1, n_y = 0, n_z = 0 \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} , \\ \langle a_f | y | a_i \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle n_x = 0, n_y = 0, n_z = 0 | y | n_x = 0, n_y = 1, n_z = 0 \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} , \end{aligned}$$

hence

$$\langle a_f | \hat{r} | a_i \rangle = \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, 0 \right) ,$$

and

$$|\langle a_f | \hat{r} | a_i \rangle|^2 = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega} .$$

We finally get

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)_{i \rightarrow f} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right) \frac{4}{3c^2} \omega^3 \frac{\hbar}{2m\omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right) \frac{2}{3mc^2} \hbar\omega^2 .$$