Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

24 **Febbraio** 2021

- **problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]**

  Una particella di massa m si trova in un potenziale armonico unidimensionale di pulsazione ω. Al tempo $t = 0$, lo stato della particella è dato da

  $$|\psi, 0\rangle = A\left(|3\rangle - i\,|4\rangle\right) .$$

  Dopo aver normalizzato lo stato, calcolare i valori medi della posizione e della quantità di moto in funzione del tempo, $\langle\psi, t|\,\hat{x}\,|\psi, t\rangle$ e $\langle\psi, t|\,\hat{p}\,|\psi, t\rangle$.

- **problema 2 - Momento angolare - [10 punti]**

  La dinamica di due particelle di spin 1/2 è descritta da $\hat{H} = -A\hat{\boldsymbol{S}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_2 + B(\hat{S}_{1,z} - \hat{S}_{2,z})$, dove $\hat{\boldsymbol{S}}_1$ ed $\hat{\boldsymbol{S}}_2$ sono gli operatori (vettoriali) di spin per le due particelle, di cui $\hat{S}_{1,z}$ ed $\hat{S}_{2,z}$ costituiscono le terze componenti. Infine, A e B sono costanti positive. All'istante $t = 0$, vengono misurate le componenti lungo l'asse x dello spin delle due particelle ed entrambe le misure danno il risultato $+\frac{\hbar}{2}$. Determinare i valori medi di $\hat{S}_{1,z}$ ed $\hat{S}_{2,z}$ al generico tempo $t > 0$.

- **problema 3 - due particelle in una buca di potenziale - [10 punti]**

  Due particelle identiche di massa m e spin 0 si trovano in una buca di potenziale unidimensionale di larghezza L. La debole interazione tra esse può essere descritta dall'energia potenziale $\hat{V} = -V_0 L\delta(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)$.

  1. Ignorando l'interazione, scrivere la funzione d'onda e l'energia per lo stato fondamentale e per il primo stato eccitato del sistema.
  2. Utilizzando la teoria delle perturbazioni, ottenere la correzione al primo ordine in V_0 alle energie calcolate in precedenza.

Formule utili:

$$\text{autofunzioni per una buca infinita di potenziale}: \; \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\ \text{con}\ \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

27 **Gennaio** 2021

- **problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]**

  Una particella di massa m si trova in un potenziale armonico unidimensionale di pulsazione ω. Al tempo $t = 0$, lo stato della particella è una sovrapposizione degli autostati dell'energia, data da

  $$|\psi, 0\rangle = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \; |n\rangle \; .$$

  1. trovare la costante A;
  2. scrivere un'espressione per lo stato evoluto al tempo t, $|\psi, t\rangle$;
  3. mostrare che la densità di probabilità di posizione $\rho(x,t) = |\langle x\,|\psi, t\rangle\,|^2$ è una funzione periodica del tempo e trovarne il periodo;
  4. trovare il valor medio dell'energia.

  Suggerimento: usare le serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$; $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} = 1$.

- **problema 2 - Momento angolare - [10 punti]**

  La dinamica di un rotatore tridimensionale con momento di inerzia I è descritta da $\hat{H} = \frac{\hat{L}^2}{2I} + \omega \hat{L}_z$, dove $\hat{L}^2$ ed $\hat{L}_z$ sono il modulo quadro e la terza componente del momento angolare, rispettivamente; mentre ω è una costante con le dimensioni di frequenza. All'istante $t = 0$ il sistema si trova in un autostato comune di $\hat{L}^2$ (con autovalore $2\hbar^2$) e di $(L_x + L_z)/\sqrt{2}$ (con autovalore $\hbar$).

  1. Determinare lo stato del sistema al generico tempo $t > 0$;
  2. Determinare il valor medio di L_x in funzione del tempo.

- **problema 3 - due fermioni polarizzati in spin - [10 punti]**

  Due particelle identiche di massa m e spin 1/2 si trovano in una buca di potenziale unidimensionale di larghezza L. Se, a causa di un campo magnetico molto intenso, lo spin di entrambe le particelle è fissato nello stato $|+\rangle$ (autostato di $\hat{S}_z$ con autovalore $\hbar/2$), scrivere l'energia minima del sistema e la corrispondente funzione d'onda. Se è presente un'energia potenziale di interazione della forma $\hat{V} = k\delta(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)$, calcolare la correzione al primo ordine all'energia dello stato descritto in precedenza. Dare un'interpretazione intuitiva del risultato ottenuto.

Formule utili:

$$\text{autofunzioni per una buca infinita di potenziale}: \; \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \text{ con } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

17 **Novembre** 2020

- **problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]**

  Tra tutti gli stati di un oscillatore armonico unidimensionale di pulsazione ω si determini quello in cui:

  1. la misura dell'energia può dare il valore $\hbar\omega/2$ con probabilità $\frac{1}{2}$ e il valore $3\hbar\omega/2$ con probabilità $\frac{1}{2}$
  2. compatibilmente con la richiesta di cui al punto precedente, il valor medio della posizione assume il valore massimo possibile.

  Considerando lo stato appena trovato come quello iniziale del sistema, se ne scriva l'evoluto temporale fino ad un generico tempo t e si calcoli su di esso il valor medio dell'operatore posizione, $\langle \hat{x}(t) \rangle$.

- **problema 2 - Spin** 1 **- [10 punti]**

  Si consideri una particella di spin $S = 1$. La sua dinamica sia descritta dall'Hamiltoniano $\hat{H} = \frac{\omega_0}{\hbar}(\hat{S}_x^2 - \hat{S}_y^2)$. Se al tempo $t = 0$, una misura di $\hat{S}_z$ fornisce il valore $+\hbar$, calcolare il valor medio delle tre componenti dello spin al generico tempo t.

- **problema 3 - perturbazioni indipendenti dal tempo - [10 punti]**

  Si consideri un atomo di idrogeno perturbato dal potenziale:

  $$V = \lambda \frac{e^{-\beta r}}{r} .$$

  Si calcoli la variazione dell'energia dello stato fondamentale al primo ordine e si discutano i limiti di validità dell'approssimazione se, come ordine di grandezza, β è dell'ordine del reciproco del raggio di Bohr, $\beta \sim a_b^{-1}$.

Formule utili:

operatore di distruzione per un oscillatore armonico: $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{x_0} + i\frac{\hat{p}}{p_0}\right)$ con $x_0 = \frac{\hbar}{p_0} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

stato fondamentale dell'atomo di idrogeno: $\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_b^3}}\, e^{-\frac{r}{a_b}}$,

integrale utile: $\int_0^\infty r\, e^{-\alpha r}\, dr = \frac{1}{\alpha^2}$.

Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

17 **Settembre** 2020

- **problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]**

  Una particella di massa m è confinata a muoversi lungo l'asse x e soggetta ad un potenziale armonico di frequenza ω. Essa si trova in uno stato in cui la misura di energia può fornire con uguale probabilità i valori $E_1 = \frac{3}{2}\,\hbar\omega$ ed $E_2 = \frac{5}{2}\,\hbar\omega$.

  1. Scrivere il ket di stato $|\psi, t\rangle$ del sistema sapendo che, al tempo $t = 0$, il valor medio della quantità di moto vale $\langle\psi, 0|\,\hat{p}\,|\psi, 0\rangle = \sqrt{\hbar m\omega}$.
  2. Determinare l'istante di tempo $t > 0$ tale che $\langle\psi, t|\,\hat{p}\,|\psi, t\rangle = 0$.

- **problema 2 - Momento angolare - [10 punti]**

  Una particella che si trova in un potenziale centrale è nello stato descritto dalla funzione d'onda

  $$\psi(x, y, z) = A(xy + yz + zx)$$

  1. Qual è la probabilità che una misura del quadrato del momento angolare orbitale dia risultato nullo ?
  2. Qual è la probabilità che si ottenga il valore $|\boldsymbol{L}|^2 = 6\hbar^2$?
  3. Quali sono le probabilità relative ai possibili valori di L_z?

- **problema 3 - perturbazioni dipendenti dal tempo - [10 punti]**

  Una particella di massa m è confinata in una buca di potenziale unidimensionale estremamente profonda, con pareti in $x = 0$ ed $x = L$. Al tempo $t = 0$, essa si trova nello stato fondamentale dell'Hamiltoniano, $\psi_1(x)$. Per tempi $t > 0$, viene accesa una perturbazione dipendente dal tempo, localizzata nel centro della buca, della forma $V(t) = V_0 L\, e^{-\gamma t}\, \delta(x - \frac{L}{2})$. Usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine, calcolare le probabilità, $P_2(t)$ e $P_3(t)$, che, al tempo $t \gg \gamma^{-1}$, la particella si trovi nel primo e nel secondo stato eccitato.

Formule utili:

operatore di distruzione per un oscillatore armonico: $\hat{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\hat{x}}{x_0} + i\dfrac{\hat{p}}{p_0}\right)$, con $x_0 = \dfrac{\hbar}{p_0} = \sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega}}$;

armoniche sferiche: $Y_0^0 = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}$, $Y_1^0 = \sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\,\cos\theta$, $Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}$,

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\theta - 1),\ Y_2^{\pm 2} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{\pm i\varphi},\ Y_2^{\pm 2} = \mp\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\, e^{\pm 2i\varphi}\ ;$$

autofunzioni di $\hat{H}$ per una buca infinita: $\psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\,\sin\left(\dfrac{\pi n x}{L}\right)$.

Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

17 **Giugno** 2020

- **problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]**

  Considerare una particella di massa m confinata a muoversi lungo l'asse x e soggetta ad un potenziale armonico di frequenza ω. Se lo stato iniziale del sistema è dato da $|\psi, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(2\,\hat{a}^\dagger + \mathbb{1}\right) |0\rangle$, dove $|0\rangle$ è lo stato fondamentale e $\hat{a}^\dagger$ è l'operatore di creazione, ottenere il valor medio dell'operatore posizione ad un generico tempo $t > 0$.

- **problema 2 - Momento angolare - [10 punti]**

  La configurazione fisica di una particella è descritta dallo stato $|\psi\rangle$, autostato del modulo quadro del momento angolare, $|\hat{\boldsymbol{L}}|^2$, con autovalore $2\hbar^2$. Lo stato $|\psi\rangle$ è anche autostato dell'operatore $\hat{L}_x$, componente del momento angolare lungo l'asse x, con autovalore massimo. Esprimere lo stato nella base degli autostati di $|\hat{\boldsymbol{L}}|^2$ ed $\hat{L}_z$.

- **problema 3 - perturbazioni indipendenti dal tempo - [10 punti]**

  Si consideri un atomo di idrogeno perturbato dal potenziale:

  $$H_i = \lambda\, \frac{e^{-\beta r}}{r^2}$$

  Si calcoli la variazione dell'energia dello stato fondamentale al primo ordine e si discuta della validità della approssimazione.

Formule utili:

operatore di distruzione per un oscillatore armonico: $\hat{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left(\dfrac{\hat{x}}{x_0} + i \dfrac{\hat{p}}{p_0} \right)$ con $x_0 = \dfrac{\hbar}{p_0} = \sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega}}$

stato fondamentale dell'atomo di idrogeno: $\psi_{1s}(r) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a_b^3}}\, e^{-r/a_b}$.

Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

19 **Febbraio** 2020

- **problema 1 - oscillatore armonico perturbato - [10 punti]**

  Un elettrone (di massa m e carica $q = -e$) è confinato a muoversi lungo l'asse x e soggetto ad un potenziale armonico di frequenza ω. Il sistema è perturbato dalla presenza del campo elettrico $\boldsymbol{E} = E_0 \hat{\boldsymbol{u}}_x$, parallelo alla direzione del moto. Considerando tale campo elettrico una piccola perturbazione, ottenere l'espressione per lo stato fondamentale del sistema al primo ordine perturbativo. Usare tale espressione per calcolare il valor medio della posizione dell'elettrone.

  Sotto quale condizione si può considerare E_0 una perturbazione piccola?

- **problema 1 - oscillatore armonico perturbato - [bonus]**

  Risolvere in maniera esatta il problema precedente.

- **problema 2 - Spin** 1 **- [10 punti]**

  Si consideri una particella di spin $S = 1$. La sua dinamica sia descritta dall'Hamiltoniano $\hat{H} = a\hat{S}_z + \frac{b}{\hbar}\hat{S}_x^2$, dove a e b sono costanti con le dimensioni di frequenza. Se al tempo $t = 0$, una misura di $\hat{S}_z$ fornisce il valore $+\hbar$, calcolare il valor medio delle tre componenti dello spin al generico tempo t.

- **problema 3 - Atomo di Idrogeno - [10 punti]**

  Al tempo $t = 0$, lo stato dell'elettrone nell'atomo di idrogeno sia dato, nella base degli autostati dell'Hamiltoniano $\{|n, l, m\rangle\}$, da

  $$|\psi, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} \Big(2\,|1,0,0\rangle + |2,1,0\rangle + \sqrt{2}\,|2,1,1\rangle + \sqrt{3}\,|2,1,-1\rangle \Big) \, .$$

  1. Qual è il valor medio dell'energia ?
  2. Al tempo $t = 0$, viene eseguita una misura (supposta praticamente istantanea) dell'operatore $\hat{L}_z$, terza componente del momento angolare orbitale. La misura fornisce un valore nullo. Qual è la probabilità di ottenere tale valore ?
  3. Scrivere lo stato del sistema ad un generico tempo t successivo alla misura.

Formule utili:

operatore di distruzione per un oscillatore armonico: $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{x}}{x_0} + i \frac{\hat{p}}{p_0} \right)$ con $x_0 = \frac{\hbar}{p_0} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

29 **Gennaio** 2020

- **problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]**

  Considerare una particella di massa m confinata a muoversi lungo l'asse x e soggetta ad un potenziale armonico di frequenza ω. Ottenere un'espressione per gli operatori $\hat{x}(t)$ e $\hat{p}(t)$ in rappresentazione di Heisenberg. Se lo stato iniziale del sistema è dato da $|\psi, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$, dove $|n\rangle$ è autostato dell'Hamiltoniano $\forall n \in \mathbb{N}$, ottenere i valori medi di $\hat{x}(t)$ e $\hat{p}(t)$ su tale stato.

- **problema 2 - Spin** 1 **- [10 punti]**

  Si consideri una particella di spin $S = 1$. La sua dinamica sia descritta dall'Hamiltoniano $\hat{H} = \frac{\omega_0}{\hbar}(\hat{S}_x^2 - \hat{S}_y^2)$. Se al tempo $t = 0$, una misura di $\hat{S}_x$ fornisce il valore $+\hbar$, calcolare il valor medio delle tre componenti dello spin al generico tempo t.

- **problema 3 - perturbazioni dipendenti dal tempo - [10 punti]**

  Una particella di massa m è confinata in una buca di potenziale unidimensionale estremamente profonda, con pareti in $x = 0$ ed $x = L$. Al tempo $t = 0$, essa si trova nello stato fondamentale dell'Hamiltoniano, $\psi_1(x)$. Per tempi $t > 0$, viene accesa una perturbazione dipendente dal tempo, localizzata nel centro della buca, della forma $V(t) = V_0 L\, e^{-\gamma t}\, \delta(x - \frac{L}{2})$. Usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine, calcolare le probabilità, $P_2(t)$ e $P_3(t)$, che, al tempo $t \gg \gamma^{-1}$, la particella si trovi nel primo e nel secondo stato eccitato.

Formule utili:

operatore di distruzione per un oscillatore armonico: $\hat{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\hat{x}}{x_0} + i\dfrac{\hat{p}}{p_0}\right)$ con $x_0 = \dfrac{\hbar}{p_0} = \sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega}}$

autofunzioni di $\hat{H}$ per una buca infinita: $\psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\,\sin\left(\dfrac{\pi n x}{L}\right)$.

Prova Scritta di Meccanica Quantistica

19 **Novembre** 2019

problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]

Si consideri una particella di massa m vincolata a muoversi in una dimensione spaziale e soggetta ad un potenziale armonico di frequenza ω. Al tempo $t = 0$, essa si trova nello stato coerente $|\alpha\rangle$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Ricordando che $|\alpha\rangle$ è autostato dell'operatore di distruzione, tale che $\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$, trovare il valor medio della posizione e della quantità di moto della particella al tempo t.

problema 2 - spin $1/2$ **- [10 punti]**

L'interazione tra due particelle distinguibili di spin $1/2$ è descritta tramite l'Hamiltoniana

$$H = -a\,(S_1^x S_2^x + S_1^y S_2^y)\ ,$$

essendo S_i^x, S_i^y, S_i^z le componenti x,y,z dello spin della i-esima particella e a una costante.

1. Trovare autovettori e autovalori dell'Hamiltoniana.
2. Se al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|-_1, +_2\rangle$, autoket simultaneo di S_1^z, S_2^z con autovalori $-\hbar/2$, $\hbar/2$, rispettivamente, trovare lo stato del sistema al tempo t.

problema 3 - teoria delle perturbazioni - [10 punti]

Una particella di massa m si trova in una buca di potenziale unidimensionale, estremamente profonda, estesa tra $x = 0$ ed $x = L$. Essa viene perturbata localmente, a metà della buca, tramite l'energia potenziale $V = -V_0\,\delta(x - \frac{L}{2})$. Calcolare la variazione dell'energia degli autostati dell'Hamiltoniana imperturbata, al primo ordine perturbativo.

Si ricorda che, per la buca infinita, autostati ed autovalori dell'energia sono dati da

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin(k_n x)\,, \quad \varepsilon_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}\,, \qquad \text{con } k_n = n\frac{\pi}{L}\,,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

13 **Settembre** 2019

- **problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]**

  Si consideri una particella di massa m vincolata a muoversi in una dimensione spaziale e soggetta a un potenziale armonico di frequenza ω. A un certo istante di tempo, essa si trova nello stato

  $$|\alpha\rangle = e^{-i\hat{p}x_1/\hbar}\,|0\rangle \ .$$

  1. Calcolare i valori medi di posizione e impulso sullo stato $|\alpha\rangle$.
  2. Verificare che $|\alpha\rangle$ è uno stato coerente, cioè un autostato dell'operatore di distruzione $\hat{a}$, e trovarne l'autovalore corrispondente.

  Suggerimento: utilizzare (i) l'espressione di $\hat{a}$ in termini di $\hat{x}$ e $\hat{p}$; (ii) $[\hat{x}, f(\hat{p})] = i\hbar\frac{df(\hat{p})}{dp}$.

- **problema 2 - spin** 1 **- [10 punti]**

  Una particella di spin 1 si trova, al tempo $t = 0$, nell'autostato dell'operatore di spin $\hat{S}_z$ con autovalore 0. L'Hamiltoniano del sistema è $\hat{H} = \omega_0\hat{S}_x$, con ω_0 costante.

  1. Si determini lo stato al tempo $t > 0$;
  2. si calcolino i valori medi di $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ e $\hat{S}_z$ al tempo $t > 0$.

- **problema 3 - teoria delle perturbazioni - [10 punti]**

  Una particella di massa m vincolata a un moto unidimensionale tra gli estremi $x = 0$ ed $x = a$ è soggetta a una perturbazione della forma $V = \epsilon p^2/(2m)$, con $\epsilon \ll 1$. Calcolare al prim'ordine perturbativo lo spostamento dei livelli energetici del sistema e confrontare il risultato con il calcolo esatto.

Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

8 **Luglio** 2019

- **problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]**

  Si consideri una particella di massa m vincolata a muoversi in una dimensione spaziale e soggetta ad un potenziale armonico di frequenza ω. Al tempo $t = 0$, essa si trova nello stato coerente $|\alpha\rangle$, con $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \in \mathbb{C}$. Ricordando che $|\alpha\rangle$ è autostato dell'operatore di distruzione, tale che $\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$ e che, nella base degli autostati dell'energia, si ha $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle$, trovare:

  1. lo stato del sistema al tempo t, $|\psi, t\rangle$;
  2. i valori medi dell'energia e della posizione sullo stato $|\psi, t\rangle$.

- **problema 2 - spin** $1/2$ **- [10 punti]**

  Una particella di spin $1/2$ si trova, al tempo $t = 0$, nellautostato dell'operatore di spin $\hat{S}_x$ con autovalore $\hbar/2$. L'Hamiltoniano del sistema è $\hat{H} = 2\omega_0\hat{S}_z$, con ω_0 costante.

  1. Si determini lo stato al tempo $t > 0$;
  2. si calcolino i valori medi di $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ e $\hat{S}_z$ al tempo $t > 0$.

- **problema 3 - teoria delle perturbazioni - [10 punti]**

  Una particella di massa m si trova in una buca di potenziale unidimensionale, estremamente profonda, estesa tra $x = 0$ ed $x = a$. Nella buca di potenziale viene inserita un'impurezza fortemente localizzata, la cui azione sulla particella è descrivibile tramite l'energia potenziale $V = -V_0\delta(x - a/2)$. Calcolare la variazione dell'energia degli autostati dell'Hamiltoniana imperturbata, al primo ordine perturbativo. Quale condizione deve soddisfare V_0 affinché la perturbazione possa effettivamente considerarsi piccola ?

Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

19 **Giugno** 2019

- **problema 1 - sistema a due livelli - [10 punti]**

  Si consideri una particella di spin 1/2, di massa m e fattore giromagnetico g, posta in un campo magnetico statico orientato lungo l'asse z, $\boldsymbol{B}_0 = (0, 0, B_0)$.

  1. Scrivere l'Hamiltoniano H_0 che descrive tale situazione e trovarne autostati ed autovalori.

  Al tempo $t = 0$, con il sistema nello stato fondamentale di H_0, viene acceso (su una scala di tempi cortissima) un ulteriore campo magnetico, perpendicolare al primo, $\boldsymbol{B}_1 = (B_1, 0, 0)$.

  2. Scrivere l'espressione del nuovo Hamiltoniano e trovarne autovalori ed autovettori.
  3. Scrivere l'espressione dello stato del sistema al tempo t generico, e calcolare il valor medio della componente z dello spin in funzione del tempo.

- **problema 2 - particelle identiche - [10 punti]**

  Si considerino due bosoni identici, di spin 0 e massa m, confinati a muoversi in una dimensione spaziale e all'interno di una buca di potenziale estremamente profonda, di larghezza L.

  1. Scrivere l'espressione della funzione d'onda e dell'energia dello stato fondamentale e del primo stato eccitato del sistema.
  2. Se le due particelle fossero fermioni di spin 1/2, le energie dello stato fondamentale e del primo eccitato ricavate nel punto precedente sarebbero diverse? se si, di quanto?

- **problema 3 - teoria delle perturbazioni - [10 punti]**

  Una particella di massa m si trova in un potenziale armonico unidimensionale di frequenza ω.

  1. Scrivere l'Hamiltoniano H_0 che descrive tale situazione e indicarne autostati ed autovalori.

  Essa viene sottoposta alla perturbazione $V = \lambda x^3$, dove λ è una costante con le dimensioni opportune, mentre x è l'operatore posizione della particella. Usando la teoria delle perturbazioni,

  2. valutare le prime due correzioni all'energia dello stato fondamentale;
  3. ottenere la forma dello stato fondamentale al primo ordine perturbativo.

Prova Scritta di Meccanica Quantistica

2 **Aprile** 2019

problema 1

Si consideri una particella di massa m, vincolata a muoversi in una dimensione sotto l'azione di un potenziale armonico di frequenza ω. Se, al tempo $t = 0$, la particella si trova nello stato

$$|\psi, t\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|0\rangle + \sqrt{2}\, |2\rangle \right) ,$$

trovare il valor medio dell'energia, della posizione e della quantità di moto, come funzioni del tempo.

problema 2

La dinamica di un rotatore piano, con momento di inerzia I e momento di dipolo elettrico d è descritta dall'Hamiltoniano $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, con

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{L}_z^2}{2I} , \qquad \hat{V} = -d\, E\, \cos\hat{\varphi} ,$$

dove $\hat{V}$ descrive l'azione di un campo elettrico orientato lungo l'asse x e $\hat{\varphi}$ è l'angolo azimutale, tale che $\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi}$. Usando la teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo, dopo aver scritto le autofunzioni e gli autovalori di H_0, valutare la prima e la seconda correzione all'energia dello stato fondamentale, dovute alla presenza di $\hat{V}$.

problema 3

Quanto valgono le probabilità $P_{2s}(a_b)$ e $P_{2s}(2a_b)$ di trovare un elettrone nello stato $|2s\rangle$ dell'atomo di idrogeno entro una distanza pari, rispettivamente, ad uno e due raggi di Bohr dal nucleo ?

Si ricorda che la parte radiale della funzione d'onda dello stato $|2s\rangle$ è data da

$$R_{20}(r) = \left(\frac{1}{2a_b} \right)^{3/2} \left(2 - \frac{r}{a_b} \right) e^{-\frac{r}{2a_b}} .$$

Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

21 **Febbraio** 2019

- **problema 1 - sistema a due livelli - [12 punti]**

  Si consideri un sistema fisico avente due configurazioni, descritte dei ket $|1\rangle$ e $|2\rangle$, nelle quali la componente verticale del momento di dipolo elettrico ha i valori ben definiti $\pm d_0$, rispettivamente. L'operatore $\hat{D}_z$ è, dunque, $\hat{D}_z = d_0(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|)$. L'Hamiltoniano imperturbato del sistema, espresso tramite questi stati, si scrive

  $$\hat{H}_0 = \varepsilon_0(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) - A(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)\,.$$

  1. Trovarne autostati ed autovalori.

  Il sistema è perturbato dalla presenza di un campo elettrico $\boldsymbol{E} = E_0\hat{\boldsymbol{u}}_z$; pertanto l'Hamiltoniano totale diventa $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$, dove $\hat{H}_1 = -E_0\hat{D}_z$.

  2. Trovare gli autovalori dell'energia come funzioni del campo elettrico E_0 e valutare il valor medio dell'operatore $\hat{D}_z$ sullo stato fondamentale del sistema.
  3. Assumendo il campo elettrico 'piccolo' (e dopo aver specificato 'piccolo rispetto a cosa'), sviluppare quest'ultimo valor medio in serie, in modo da ottenere la suscettività lineare χ, tale che $\langle\hat{D}_z\rangle \simeq \chi E_0$.

- **problema 2 - particelle identiche - [10 punti]**

  Si considerino due fermioni identici, di spin 1/2 e massa m, confinati a muoversi in una dimensione spaziale e sottoposti ad un potenziale armonico di frequenza ω.

  1. Scrivere l'espressione dello stato fondamentale del sistema (inclusa la parte di spin) e specificarne l'energia.
  2. Se le due particelle sono costrette a mantenere lo spin orientato lungo z, cioè se gli spin sono forzati a trovarsi nello stato $|+_1, +_2\rangle$, qual è lo stato con energia più bassa possibile ?

- **problema 3 - teoria delle perturbazioni - [10 punti]**

  Un atomo di idrogeno, inizialmente nello stato fondamentale, $|n = 1, l = 0, m = 0\rangle$, viene sottoposto per $t \geq 0$ alla perturbazione $\hat{V}(t) = e\hat{z}E_0 e^{-\alpha t}$, descrivente l'effetto di un campo elettrico variabile nel tempo, $\boldsymbol{E}(t) = E_0 e^{-\alpha t}\,\hat{\boldsymbol{u}}_z$. Utilizzando la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo al primo ordine, calcolare la probabilità che l'atomo si trovi nello stato $|n = 2, l = 1, m = 0\rangle$ per tempi $t \gg \alpha^{-1}$.

Formule utili:

elemento di matrice dell'atomo di idrogeno $\langle 2,1,0|\,\hat{z}\,|1,0,0\rangle = ca_b$,dove a_b è il raggio di Bohr, mentre $c \simeq 0.745$

Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

1 **Febbraio** 2019

- **problema 1 - oscillatore armonico bidimensionale - [12 punti]**

  Considerare una particella di massa m confinata a muoversi nel piano x-y e soggetta ad un potenziale armonico bidimensionale di frequenza ω, la cui dinamica è descritta dall'Hamiltoniano

  $$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)\,.$$

  1. Introducendo operatori di creazione e distruzione per l'asse x e, separatamente, per l'asse y, esprimere H in termini dell'operatore numero di eccitazioni $n = a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y$;
  2. mostrare che stati della forma $|n_x, n_y\rangle$, ottenuti dallo stato di vuoto $|0,0\rangle$ applicando n_x volte l'operatore $a_x^\dagger$ ed n_y volte l'operatore $a_y^\dagger$, con $n_x, n_y \in \mathbb{N}$, sono autostati di H ;
  3. esprimere tramite gli operatori di creazione e distruzione l'operatore $L_z = xp_y - yp_x$ e mostrare che esso è una costante del moto.
  4. mostrare che lo stato $|0,0\rangle$ è autostato di L_z oltre che di H;
  5. costruire le combinazioni lineari dei ket $|0,1\rangle$ e $|1,0\rangle$ che sono anche autostati di L_z.

- **problema 2 - bosoni in una buca infinita - [10 punti]**

  Si considerino due bosoni identici, di spin 0 e massa m, intrappolati in una buca di potenziale infinitamente profonda e di larghezza L. Scrivere l'espressione della funzione d'onda e dell'energia per i due autostati dell'energia aventi l'autovalore più piccolo possibile. Se le due particelle hanno un'interazione descritta da $H_{int} = -V_0\,\delta(x_1 - x_2)$ (dove x_i è l'operatore posizione per la particella i–esima), valutare la correzione al primo ordine perturbativo in V_0 alle energie di tali autostati.

- **problema 3 - spin 1/2 - [10 punti]**

  L'interazione tra due particelle distinguibili di spin 1/2, aventi operatori di spin $\boldsymbol{S}_1$ ed $\boldsymbol{S}_2$, rispettivamente, è descritta dall'Hamiltoniano

  $$H = A(\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 - 3S_1^z\,S_2^z)\,.$$

  Sapendo che all'istante $t = 0$, lo stato del sistema è rappresentato dal ket $|+_1, -_2\rangle$, dove $|\pm_i\rangle$ sono gli autostati dell'operatore S_i^z, valutare il valor medio delle componenti z dello spin delle due particelle in funzione del tempo, $\langle S_1^z(t)\rangle$ e $\langle S_2^z(t)\rangle$.

Formule utili:

operatore di distruzione per un oscillatore armonico: $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{x_0} + i\,\frac{\hat{p}}{p_0}\right)$ con $x_0 = \frac{\hbar}{p_0} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

autofunzioni di $\hat{H}$ per una buca infinita: $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$.

Meccanica quantistica 1

20 Novembre 2018

Esercizio 1

In una buca di potenziale unidimensionale infinita di larghezza a si consideri lo stato descritto al tempo $t = 0$ dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A \left[2\cos\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi x}{a} + \sin\frac{3\pi x}{a} \right] .$$

Dopo aver trovato la costante di normalizzazione A si determinino i valori medi della posizione e dell'impulso.

[10 punti]

Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin 1/2 interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = -a\left(S_1^x S_2^x + S_1^y S_2^y + 2 S_1^z S_2^z\right) ,$$

essendo S_i^x, S_i^y, S_i^z le componenti x,y,z dello spin della i-esima particella e a una costante. Trovare autovettori e autovalori dell'Hamiltoniana.

Se al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|-\rangle|+\rangle$, autoket simultaneo di S_1^z, S_2^z agli autovalori $-\hbar/2$, $\hbar/2$, trovare lo stato del sistema al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Un oscillatore armonico unidimensionale sia sottoposto alla perturbazione

$$V = \epsilon\hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}\right) ,$$

essendo $\epsilon \ll 1$. Si determinino gli spostamenti al prim'ordine in ϵ di tutti i livelli imperturbati e lo spostamento al second'ordine in ϵ del livello fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a} , \quad \hat{a} = \sqrt{(m\omega)/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)) , \quad \hat{J}_\pm|\,j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|\,j, m \pm 1\rangle$$

Meccanica quantistica 1
12 Settembre 2018

Esercizio 1

In una buca di potenziale unidimensionale infinita di larghezza a si consideri lo stato descritto al tempo $t = 0$ dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \, .$$

Dopo aver trovato la costante di normalizzazione A si determini il valore della dispersione della posizione $\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin 1/2 interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = -a \left(S_1^x S_2^x + S_1^y S_2^y - S_1^z S_2^z \right) \, ,$$

essendo S_i^x, S_i^y, S_i^z le componenti x,y,z dello spin della i-esima particella e a una costante. Trovare autovettori e autovalori dell'Hamiltoniana.

Se al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|-\rangle|+\rangle$, autoket simultaneo di S_1^z, S_2^z agli autovalori $-\hbar/2$, $\hbar/2$, trovare lo stato del sistema al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Un oscillatore armonico unidimensionale sia sottoposto alla perturbazione

$$V = \epsilon \left(m\omega^2 \hat{x}^2 - \frac{\hat{p}^2}{m} \right) \, ,$$

essendo $\epsilon \ll 1$. Si determinino gli spostamenti al prim'ordine in ϵ di tutti i livelli imperturbati e lo spostamento al second'ordine in ϵ del livello fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \, , \quad \hat{a} = \sqrt{(m\omega)/(2\hbar)} (\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)) \, , \quad \hat{J}_\pm |\, j, m\rangle = \hbar \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |\, j, m \pm 1\rangle$$

Meccanica quantistica 1
11 Luglio 2018

Esercizio 1

In una buca di potenziale unidimensionale infinita di larghezza a si consideri lo stato descritto al tempo $t = 0$ dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A \left[\cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi x}{a} + 2 \sin \frac{\pi x}{a} \right] .$$

Dopo aver trovato la costante di normalizzazione A si determini il valor medio della posizione al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 2

Due particelle di spin 1/2 sono descritte dall'hamiltoniana

$$H = A(\hat{S}_x^{(1)} + \hat{S}_x^{(2)})^2 ,$$

con A costante reale e $\hat{S}_x^{(i)}$ componente x dello spin della i-esima particella.

Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

[10 punti]

Esercizio 3

Un oscillatore armonico unidimensionale sia sottoposto alla perturbazione

$$V = \epsilon \alpha \hat{p}^2 ,$$

essendo α una costante dimensionata reale ed $\epsilon \ll 1$. Si determinino gli spostamenti al prim'ordine in ϵ di tutti i livelli imperturbati e lo spostamento al second'ordine in ϵ del livello fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} , \quad \hat{a} = \sqrt{(m\omega)/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)) , \quad \hat{J}_\pm |j\,,\,m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j\,,\,m \pm 1\rangle$$

Meccanica quantistica 1
20 Giugno 2018

Esercizio 1

In una buca di potenziale infinita estesa da $x = 0$ a $x = a$ si consideri la funzione d'onda

$$\psi(x) = A\left(\sin\frac{2\pi x}{a} + \sin\frac{\pi x}{a}\right) .$$

Trovare il valore di A e il valor medio della posizione e dell'impulso.

[10 punti]

Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin 1/2 siano descritte dall'Hamiltoniana

$$H = -\alpha(\vec{S}_1 + 2\vec{S}_2) \cdot (\vec{S}_1 - \vec{S}_2) ,$$

essendo rispettivamente $\vec{S}_1$ lo spin della prima particella e $\vec{S}_2$ lo spin della seconda particella.

Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

Se al tempo $t = 0$ le due particelle si trovano nello stato

$$|+\rangle|-\rangle ,$$

autoket di S_1^z all'autovalore $\hbar/2$ e di S_2^z all'autovalore $-\hbar/2$, trovare lo stato al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Un oscillatore armonico di pulsazione ω e massa m è sottoposto alla perturbazione

$$V = i\epsilon A(\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger) ,$$

essendo A una costante finita reale e $\epsilon \ll 1$. Trovare la correzione al prim'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia di tutti i livelli. Trovare la correzione al second'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia del livello fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a} , \quad \hat{a} = \sqrt{(m\omega)/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)) , \quad \hat{J}_\pm|j\,,\,m\rangle = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|j\,,\,m\pm 1\rangle$$

Meccanica quantistica 1
4 Aprile 2018

Esercizio 1

In una buca di potenziale unidimensionale infinita di larghezza a si consideri lo stato descritto al tempo $t = 0$ dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A\left[\frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi x}{a} - \sin\frac{\pi x}{a}\right].$$

Dopo aver trovato la costante di normalizzazione A si determini il valor medio della posizione al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 2

Due particelle di spin 1/2 sono descritte dall'hamiltoniana

$$H = A(\hat{S}_y^{(1)} - \hat{S}_y^{(2)})^2\,,$$

con A costante reale e $\hat{S}_y^{(i)}$ componente y dello spin della i-esima particella.

Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

[10 punti]

Esercizio 3

Un oscillatore armonico unidimensionale sia sottoposto alla perturbazione

$$V = \epsilon\alpha(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})\,,$$

essendo α una costante dimensionata reale ed $\epsilon \ll 1$. Si determinino gli spostamenti al prim'ordine in ϵ di tutti i livelli imperturbati e lo spostamento al second'ordine in ϵ del livello fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\,, \quad \hat{a} = \sqrt{(m\omega)/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \hat{J}_\pm|j\,,\,m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j\,,\,m \pm 1\rangle$$

Meccanica quantistica 1

19 Febbraio 2018

Esercizio 1

Si consideri una particella di massa m in una buca di potenziale infinita larga a. Si supponga che al tempo $t = 0$ la particella si trovi nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{4}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a} \,, & \text{per} \quad 0 < x < \frac{a}{2} \\ 0 \,, & \text{per} \quad \frac{a}{2} < x < a \,. \end{cases}$$

Si trovi la funzione d'onda al tempo t. Facoltativamente, si trovi il valor medio della posizione al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin 1/2 interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = -a \left(S_1^+ S_2^- + S_1^- S_2^+ \right) \,,$$

dove $S_i^{\pm} = S_i^+ \pm i S_i^y$, essendo S_i^x, S_i^y, S_i^z le componenti x,y,z dello spin della i-esima particella e a una costante. Trovare autovettori e autovalori dell'Hamiltoniana.

Se al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|-\rangle|+\rangle$, autoket simultaneo di S_1^z, S_2^z agli autovalori $-\hbar/2$, $\hbar/2$, trovare lo stato del sistema al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Si supponga che una particella di spin 1/2 si trovi per tempi $t \leq 0$ nello stato $|+\rangle$, autoket di S^z all'autovalore $\hbar/2$. L'hamiltoniana che descrive la particella sia

$$H = \alpha S^z + \epsilon\gamma\, \theta(t) S^x \,,$$

essendo α, γ costanti, $\theta(t)$ la funzione di Heaviside e $\epsilon \ll 1$ un parametro adimensionale. Si trovi la probabilità al prim'ordine in ϵ che per $t > 0$ la particella si trovi nello stato $|-\rangle$, autoket di S^z all'autovalore $-\hbar/2$. Si trovi, sempre la prim'ordine in ϵ lo stato della particella a tempi $t > 0$. Si dica infine quali devono essere le dimensioni di α e γ.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \,, \quad \hat{J}_{\pm} |\, j, m\rangle = \hbar \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |\, j, m \pm 1\rangle$$

Meccanica quantistica 1

30 Gennaio 2018

Esercizio 1

Si consideri l'hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - \lambda x\,.$$

1) Si scrivano e si risolvano le equazioni di Heisenberg.

2) Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema sia descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

Si trovino i valori medi di posizione e impulso al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin 1/2 interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = -a\,(S_1^x S_2^x + S_1^y S_2^y) - bS_1^z S_2^z$$

con S_i^x, S_i^y, S_i^z le componenti x,y,z dello spin della i-esima particella e a, b costanti. Trovare autovettori e autovalori dell'Hamiltoniana.

Se al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|-\rangle|+\rangle$, autoket simultaneo di S_1^z, S_2^z agli autovalori $-\hbar/2$, $\hbar/2$, trovare lo stato del sistema al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Si supponga che un atomo di idrogeno nel suo stato fondamentale per $t \leq 0$, sia sottoposto dal tempo $t = 0$ al tempo $t = T$ ad una perturbazione della forma:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\,, & \text{per} \quad 0 < r < d \\ 0\,, & \text{per} \quad r > d\,, \end{cases}$$

essendo d una costante tale che $d/a \ll 1$, con a il raggio di Bohr. Usando la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo, trovare la probabilità che per tempi maggiori di T l'atomo si trovi:

1) nello stato $|\,2\,0\,0\rangle$

2) in uno degli stati $|\,2\,1\,m\rangle$ a scelta

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-\frac{r}{a}}\,, \quad \hat{J}_\pm|\,j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|\,j,m\pm 1\rangle$$

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2a^3}}\left(1-\frac{r}{2a}\right)e^{-\frac{r}{2a}}\,, \quad R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24a^3}}\frac{r}{a}e^{-\frac{r}{2a}}$$

Meccanica quantistica 1

21 Novembre 2017

Esercizio 1

In una buca di potenziale infinita unidimensionale estesa da $x = 0$ a $x = a$ si consideri la funzione d'onda

$$\psi(x) = A\left(\sin\frac{2\pi x}{a} - \sin\frac{\pi x}{a}\right) .$$

Trovare il valore di A e il valor medio della posizione e dell'impulso.

[10 punti]

Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin 1/2 siano descritte dall'Hamiltoniana

$$H = -\alpha(\vec{S}_1 + 2\vec{S}_2)\cdot\vec{S}_2 ,$$

essendo rispettivamente $\vec{S}_1$ lo spin della prima particella e $\vec{S}_2$ lo spin della seconda particella.

Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

Se al tempo $t = 0$ le due particelle si trovano nello stato

$$|+\rangle|-\rangle ,$$

autoket di S_1^z all'autovalore $\hbar/2$ e di S_2^z all'autovalore $-\hbar/2$, trovare lo stato al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Un oscillatore armonico unidimensionale di pulsazione ω e massa m è sottoposto alla perturbazione

$$V = \epsilon A(\hat{a}\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger) ,$$

essendo A una costante finita e $\epsilon \ll 1$. Trovare la correzione al prim'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia di tutti i livelli. Trovare la correzione al second'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia del livello fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a} , \quad \hat{a} = \sqrt{(m\omega)/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)) , \quad \hat{J}_\pm|j\,,\,m\rangle = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|j\,,\,m\pm 1\rangle$$

Meccanica quantistica 1

11 Settembre 2017

Esercizio 1

Si consideri la funzione d'onda

$$\psi(x) = A\left[e^{\frac{i\pi x}{a}} + Be^{-\frac{i\pi x}{a}}\right]\cos\frac{\pi x}{a}\,.$$

Dimostrare che solo per $B = -1$ tale funzione può descrivere una particella in una buca di potenziale infinita estesa da $x = 0$ a $x = a$.

Scelto tale valore di B, si calcoli la costante di normalizzazione A. Si faccia infine evolvere la funzione d'onda al tempo t e si trovi il valor medio della posizione.

[10 punti]

Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin 1/2 siano descritte dall'Hamiltoniana

$$H = \gamma(S_x^2 + S_y^2)\,,$$

essendo $S_x = S_x^1 + S_x^2$, $S_y = S_y^1 + S_y^2$ rispettivamente le componenti x e y dello spin totale $\vec{S} = \vec{S}^1 + \vec{S}^2$, somma dello spin $\vec{S}^1$ della prima particella e dello spin $\vec{S}^2$ della seconda particella.

Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

Se al tempo $t = 0$ le due particelle si trovano nello stato

$$|+\rangle|-\rangle\,,$$

autoket di S_z^1 all'autovalore $\hbar/2$ e di S_z^2 all'autovalore $-\hbar/2$, trovare lo stato al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Un oscillatore armonico di pulsazione ω e massa m è sottoposto alla perturbazione

$$V = \epsilon A[(\hat{p} - \hat{x})(\hat{p} + \hat{x}) + (\hat{p} + \hat{x})(\hat{p} - \hat{x})]\,,$$

essendo A una costante finita e $\epsilon \ll 1$. Trovare la correzione al prim'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia di tutti i livelli. Trovare la correzione al second'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia del livello fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\,, \quad \hat{a} = \sqrt{(m\omega)/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \hat{J}_\pm|j\,,\,m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j\,,\,m \pm 1\rangle$$

Meccanica quantistica 1
10 Luglio 2017

Esercizio 1

Si consideri la funzione d'onda
$$\psi(x) = e^{\frac{i\pi x}{a}} \left(A \sin \frac{\pi x}{a} + B \cos \frac{\pi x}{a} \right) .$$
Trovare il valore di B per il quale tale funzione può descrivere una particella in una buca di potenziale infinita estesa da $x = 0$ a $x = a$.

Scelto tale valore di B, si calcoli la costante di normalizzazione A. Si trovi il valor medio della posizione e dell'impulso.

[10 punti]

Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin 1/2 siano descritte dall'Hamiltoniana
$$H = -\alpha(\vec{S}_1 - \vec{S}_2)^2 - \beta(S_1^z - S_2^z)^2 ,$$
essendo S_1^z, S_2^z le componenti z rispettivamente dello spin $\vec{S}_1$ della prima particella e dello spin $\vec{S}_2$ della seconda particella.

Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

Se al tempo $t = 0$ le due particelle si trovano nello stato
$$|+\rangle|-\rangle ,$$
autoket di S_1^z all'autovalore $\hbar/2$ e di S_2^z all'autovalore $-\hbar/2$, trovare lo stato al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Un oscillatore armonico di pulsazione ω e massa m è sottoposto alla perturbazione
$$V = \epsilon A(\hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}) ,$$
essendo A una costante finita e $\epsilon \ll 1$. Trovare la correzione al prim'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia di tutti i livelli. Trovare la correzione al second'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia del livello fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:
$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} , \quad \hat{a} = \sqrt{(m\omega)/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)) , \quad \hat{J}_\pm|j\,,\,m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j\,,\,m \pm 1\rangle$$

Meccanica quantistica 1
19 Giugno 2017

Esercizio 1

Si consideri la funzione d'onda
$$\psi(x) = A\left[e^{\frac{2i\pi x}{a}} + Be^{-\frac{2i\pi x}{a}}\right]\cos\frac{\pi x}{a}\,.$$
Dimostrare che solo per $B = -1$ tale funzione può descrivere una particella in una buca di potenziale infinita estesa da $x = 0$ a $x = a$.

Scelto tale valore di B, si calcoli la costante di normalizzazione A. Si faccia infine evolvere la funzione d'onda al tempo t e si trovi il valor medio della posizione.

[10 punti]

Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin 1/2 siano descritte dall'Hamiltoniana
$$H = \gamma(S_x + iS_y)(S_x - iS_y)\,,$$
essendo $S_x = S_x^1 + S_x^2$, $S_y = S_y^1 + S_y^2$ rispettivamente le componenti x e y dello spin totale $\vec{S} = \vec{S}^1 + \vec{S}^2$, somma dello spin $\vec{S}^1$ della prima particella e dello spin $\vec{S}^2$ della seconda particella.

Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

Se al tempo $t = 0$ le due particelle si trovano nello stato
$$|+\rangle|-\rangle\,,$$
autoket di S_z^1 all'autovalore $\hbar/2$ e di S_z^2 all'autovalore $-\hbar/2$, trovare lo stato al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Un oscillatore armonico di pulsazione ω e massa m è sottoposto alla perturbazione
$$V = \epsilon(A\hat{p}^2 + B\hat{x}^2)\,,$$
essendo A, B delle costanti finite e $\epsilon \ll 1$. Trovare la correzione al prim'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia di tutti i livelli. Trovare la correzione al second'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia del livello fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:
$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\,,\quad \hat{a} = \sqrt{(m\omega)/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))\,,\quad \hat{J}_\pm|j\,,\,m\rangle = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|j\,,\,m\pm 1\rangle$$

Meccanica quantistica 1

4 Aprile 2017

Esercizio 1

In una buca di potenziale unidimensionale infinita di larghezza a si consideri lo stato descritto al tempo $t = 0$ dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A\left[\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi x}{a} + \sin\frac{\pi x}{a}\right] .$$

Dopo aver trovato la costante di normalizzazione A si determini il valor medio della posizione al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 2

Due particelle di spin 1/2 sono descritte dall'hamiltoniana

$$H = A(\hat{S}_x^{(1)} - \hat{S}_x^{(2)})^2 \,,$$

con A costante reale e $\hat{S}_x^{(i)}$ componente x dello spin della i-esima particella.

Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

[10 punti]

Esercizio 3

Un oscillatore armonico unidimensionale sia sottoposto alla perturbazione

$$V = \epsilon\alpha\hat{x}\hat{p} \,,$$

essendo α una costante dimensionata reale ed $\epsilon \ll 1$. Si determinino gli spostamenti al prim'ordine in ϵ di tutti i livelli imperturbati e lo spostamento al second'ordine in ϵ del livello fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a} \,, \quad \hat{a} = \sqrt{(m\omega)/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)) \,, \quad \hat{J}_\pm|j\,,\,m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j\,,\,m \pm 1\rangle$$

Meccanica quantistica 1

21 Febbraio 2017

Esercizio 1

Sia dato lo stato descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(x) = A\frac{e^{ikx}}{x^2+a^2}\,,$$

essendo $a > 0$ e k delle costanti.

1) Trovare la costante di normalizzazione A.

2) Dimostrare che il principio di indeterminazione è soddisfatto.

La funzione d'onda evolva con l'Hamiltoniana libera

$$H = \frac{p^2}{2m}\,.$$

3) Trovare il valor medio di p al tempo t.

4) Trovare il valor medio di x al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin 1/2 interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = -a\vec{S}_1\cdot(\vec{S}_1+\vec{S}_2) - b\hbar(S_1^z - S_2^z)$$

con $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ gli operatori di spin delle due particelle e con S_1^z, S_2^z le loro componenti z. Trovare autovettori e autovalori dell'Hamiltoniana.

Se al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|-\rangle|-\rangle$, trovare lo stato del sistema al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Si supponga che un atomo di idrogeno nel suo stato fondamentale sia sottoposto ad una perturbazione della forma:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\,, & \text{per} \quad 0 < r < d \\ 0\,, & \text{per} \quad r > d\,, \end{cases}$$

essendo d una costante tale che $d/a \ll 1$, con a il raggio di Bohr. Trovare la correzione al prim'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia dello stato fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-\frac{r}{a}}\,, \quad \hat{J}_\pm|\,j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|\,j,m\pm1\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\frac{1}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a} \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty}dx\frac{1}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3} \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty}dx\frac{1}{(x^2+a^2)^3} = \frac{3\pi}{8a^5} \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty}dx\frac{1}{(x^2+a^2)^4} = \frac{5\pi}{16a^7}$$

Meccanica quantistica 1

30 Gennaio 2017

Esercizio 1

Sia dato lo stato descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(x) = Ae^{-\frac{x^2}{a^2}+ikx},$$

essendo a e k delle costanti.

1) Trovare la costante di normalizzazione A.

2) Dimostrare che il principio di indeterminazione è soddisfatto al minimo.

La funzione d'onda evolva con l'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} - Fx,$$

con F una costante.

3) Trovare la dispersione di p al tempo t.

4) Trovare la dispersione di x al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 2

Un elettrone all'istante $t = 0$ si trova nello stato

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|1\,,1\rangle\Big(|-\rangle + |+\rangle\Big),$$

essendo $|1\,,1\rangle$ autoket simultaneo del quadrato del momento angolare orbitale e della sua componente z, con autovalori rispettivamente $2\hbar^2$ e $\hbar$, e $|\pm\rangle$ autoket della componente z dello spin con autovalore $\pm\hbar/2$.

L'elettrone sia sottoposto all'hamiltoniana

$$H = -\alpha(\vec{L} + \vec{S})^2 + \beta\hbar(L_z + S_z)\,,$$

essendo α, β costanti dimensionate e indicando $\vec{L}$ il momento angolare orbitale e $\vec{S}$ lo spin dell'elettrone (L_z e S_z sono le loro componenti z). Quali sono le dimensioni delle costanti α e β? Trovare poi lo stato dell'elettrone al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Si supponga che un atomo di idrogeno nel suo stato fondamentale sia sottoposto ad una perturbazione

$$V(r) = \begin{cases} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d}\right), & \text{per} \quad 0 < r < d \\ 0\,, & \text{per} \quad r > d\,, \end{cases}$$

essendo d una costante tale che $d/a \ll 1$, con a il raggio di Bohr. Trovare la correzione al prim'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia dello stato fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-\frac{r}{a}}\,, \quad \hat{J}_\pm|\,j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|\,j,m \pm 1\rangle$$

Meccanica quantistica 1
2 Novembre 2016

Esercizio 1

Tra tutti gli stati di un oscillatore armonico unidimensionale trovare lo stato $|\psi\rangle$ tale che:

1) una misura dell'energia fornisca i valori $\hbar\omega/2$ e $3\hbar\omega/2$, entrambi con probabiità 1/2;

2) il valor medio dell'impulso sia nullo.

Dimostrare infine che su tale stato il principio di indeterminazione è soddisfatto.

[10 punti]

Esercizio 2

Un elettrone all'istante $t = 0$ si trova nello stato

$$|1\ \ -1\rangle|+\rangle\,,$$

essendo $|1\ \ -1\rangle$ autoket simultaneo del quadrato del momento angolare orbitale e della sua componente z, con autovalori rispettivamente $2\hbar^2$ e $-\hbar$, e $|+\rangle$ autoket della componente z dello spin con autovalore $\hbar/2$.

L'elettone sia sottoposto all'hamiltoniana

$$H = -\alpha(\vec{L} + \vec{S})^2\,,$$

essendo α una costante dimensionata e indicando $\vec{L}$ il momento angolare orbitale e $\vec{S}$ lo spin dell'elettrone. Trovare lo stato dell'elettrone al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Una particella di massa m si trova in una buca di potenziale infinita unidimensionale estesa da $x = 0$ a $x = a$. Il sistema viene perturbato da un potenziale del tipo

$$V = \epsilon\beta x^2\,,$$

con β una costante dimensionata e $\epsilon \ll 1$. Quali sono le dimensioni di β?

Trovare le correzioni a tutti i livelli energetici al prim'ordine in ϵ.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\,, \quad \hat{a} = \sqrt{(m\omega)/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \hat{J}_\pm|j\,,\,m\rangle = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|j\,,\,m\pm 1\rangle \qquad (0.1)$$

Meccanica quantistica 1

15 Settembre 2016

Esercizio 1

Tra tutti gli stati di un oscillatore armonico unidimensionale trovare lo stato $|\psi\rangle$ tale che:

1) una misura dell'energia fornisca i valori $\hbar\omega/2$ e $3\hbar\omega/2$, entrambi con probabilità 1/2;

2) il valor medio della posizione sia nullo.

Dimostrare infine che su tale stato il principio di indeterminazione è soddisfatto.

[10 punti]

Esercizio 2

Un elettrone all'istante $t = 0$ si trova nello stato

$$|1\ 1\rangle|-\rangle\,,$$

essendo $|1\ 1\rangle$ autoket simultaneo del quadrato del momento angolare orbitale e della sua componente z, con autovalori rispettivamente $2\hbar^2$ e $\hbar$, e $|-\rangle$ autoket della componente z dello spin con autovalore $-\hbar/2$.

L'elettone sia sottoposto all'hamiltoniana

$$H = -\alpha(\vec{L} + \vec{S})^2\,,$$

essendo α una costante dimensionata e indicando $\vec{L}$ il momento angolare orbitale e $\vec{S}$ lo spin dell'elettrone. Trovare lo stato dell'elettrone al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Una particella di massa m si trova in una buca di potenziale infinita unidimensionale estesa da $x = 0$ a $x = a$. Il sistema viene perturbato da un potenziale del tipo

$$V = \epsilon\beta x\,,$$

con β una costante dimensionata e $\epsilon \ll 1$. Quali sono le dimensioni di β?

Trovare le correzioni a tutti i livelli energetici al prim'ordine in ϵ.

Scrivere l'espressione per la correzione al livello fondamentale al second'ordine in ϵ.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\,, \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \hat{J}_\pm|\,j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|\,j,m\pm 1\rangle$$

Meccanica quantistica 1
7 Luglio 2016

Esercizio 1

In una buca di potenziale unidimensionale infinita si consideri lo stato descritto al tempo $t = 0$ dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A\left[\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi x}{a} + \sin\frac{3\pi x}{a}\right] .$$

Dopo aver trovato la costante di normalizzazione A si determini il valor medio della posizione al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 2

Due particelle di spin 1 sono sottoposte all'Hamiltoniana

$$H = -\alpha\left[L_z^{(1)}L_z^{(2)}\right]^2 ,$$

essendo $L_z^{(1)}$, $L_z^{(2)}$ le componenti z del momento angolare rispettivamente della prima e della seconda particella. Al tempo $t = 0$ le due particelle si trovano nello stato $|\psi\rangle_0$ tale che

$$L_x^{(1)}|\psi\rangle_0 = 0 , \quad L_z^{(2)}|\psi\rangle_0 = |\psi\rangle_0 ,$$

essendo $L_x^{(1)}$ la componente x del momento angolare della prima particella. Si scriva lo stato del sistema al tempo t nella base degli autoket simultanei di $L_z^{(1)}$ e $L_z^{(2)}$. Si determini infine il valor medio di $L_x^{(1)}$ al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Un oscillatore armonico unidimensionale sia sottoposto alla perturbazione

$$V = \epsilon(\alpha p + \beta p^2) ,$$

essendo p l'operatore impulso, α e β due costanti dimensionate reali ed $\epsilon \ll 1$. Trovate le dimensioni di α e β, si determinino gli spostamenti al prim'ordine in ϵ di tutti i livelli imperturbati e lo spostamento al second'ordine in ϵ del livello fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a} , \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)) , \quad \hat{J}_\pm|\,j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|\,j,m\pm 1\rangle$$

Meccanica Quantistica 1
16 giugno 2016

Esercizio 1

Dato un oscillatore armonico unidimensionale si consideri lo stato

$$|\psi\rangle = \sin\alpha|0\rangle + \cos\alpha\, e^{i\beta}|1\rangle\,,$$

essendo α, β costanti reali arbitrarie. Si determinino come funzioni di α e di β i valori medi di posizione e impulso sullo stato $|\psi\rangle$.

Si trovino i valori medi di posizione e impulso al tempo t usando lo schema di Schrödinger.

[11 punti]

Esercizio 2

Siano date due particelle distinguibili di spin 1/2. Si supponga che l'hamiltoniana che descrive la loro interazione sia

$$H = a\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + bS_1^x S_2^x\,,$$

essendo a, b costanti reali e $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$, $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$ rispettivamente gli operatori di spin della prima e della seconda particella. Si trovino autovalori e autovettori di H.

Se al tempo $t = 0$ il sistema si trova nell'autoket simultaneo di S_1^z all'autovalore $\hbar/2$ e di S_2^z all'autovalore $\hbar/2$, trovare lo stato del sistema al tempo t.

[11 punti]

Esercizio 3

Una buca di potenziale infinita in una dimensione di larghezza a (quindi $0 < x < a$) sia perturbata da un potenziale della forma $V = \epsilon V_0$ per $0 < x < a/2$ e $V = 0$ per $a/2 < x < a$, con V_0 una costante delle dimensioni dell'energia e $\epsilon \ll 1$.

Determinare la correzione al prim'ordine in teoria perturbativa di tutti i livelli imperturbati.

[8 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\,, \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \hat{J}_\pm|\,j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|\,j,m\pm 1\rangle$$

Meccanica quantistica 1
25 Febbraio 2016

Esercizio 1

Dato un oscillatore armonico unidimensionale si consideri lo stato

$$|\psi\rangle = A\,\hat{x}\,|0\rangle\,,$$

con A costante di normalizzazione. Trovare il valore di A. Dimostrare poi che la relazione di indeterminazione è soddisfatta. Trovare infine l'evoluto temporale dello stato $|\psi\rangle$ al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 2

Due particelle identiche di spin 1/2 siano sottoposte all'hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2) + \lambda\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2\,,$$

essendo $\hat{x}_i$, $\hat{p}_i$, $\vec{S}_i$ $(i = 1, 2)$ la coordinata, l'impulso e lo spin della i-esima particella. Trovare autovalori e autovettori dell'hamiltoniana $\hat{H}$.

[10 punti]

Esercizio 3

Una particella di massa m si trova in una buca di potenziale infinita bidimensionale di lato a $(0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a)$. Scrivere autovalori e autofunzioni dell'hamiltoniana. Il sistema viene poi perturbato dal potenziale

$$V = \epsilon\beta\,\delta\left(x - \frac{a}{2}\right)\,\delta\left(y - \frac{a}{2}\right)\,,$$

con β una costante dimensionata e $\epsilon \ll 1$. Trovare le correzioni a tutti i livelli energetici al prim'ordine in ϵ.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\,, \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \hat{J}_\pm|\,j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|\,j, m \pm 1\rangle$$

Meccanica quantistica 1
11 Febbraio 2016

Esercizio 1

Tra tutti gli stati di un oscillatore armonico bidimensionale

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2) ,$$

trovare lo stato $|\psi\rangle$ tale che:

1) se si misura l'energia si ottiene sempre il valore $2\hbar\omega$

2) valgano le seguenti uguaglianze

$$\langle\psi|x^2|\psi\rangle = \langle\psi|y^2|\psi\rangle = 4\langle\psi|xy|\psi\rangle .$$

Dimostrare che il principio di indeterminazione è soddisfatto.

[10 punti]

Esercizio 2

Un elettrone all'istante $t = 0$ si trova nello stato

$$|1\,,0\rangle|+\rangle ,$$

essendo $|1\,,0\rangle$ autoket simultaneo del quadrato del momento angolare orbitale e della sua componente z, con autovalori rispettivamente $2\hbar^2$ e 0, e $|+\rangle$ autoket della componente z dello spin con autovalore $\hbar/2$.

L'elettone sia sottoposto all'hamiltoniana

$$H = -\alpha(\vec{L} + \vec{S})^2 ,$$

essendo α una costante dimensionata e indicando $\vec{L}$ il momento angolare orbitale e $\vec{S}$ lo spin dell'elettrone. Quali sono le dimensioni della costante α? Trovare poi lo stato dell'elettrone al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Una particella di massa m si trova in una buca di potenziale infinita unidimensionale estesa da $x = 0$ a $x = a$. Il sistema viene perturbato da un potenziale del tipo

$$V = \epsilon\beta\delta\left(x - \frac{a}{4}\right) ,$$

con β una costante dimensionata e $\epsilon \ll 1$. Quali sono le dimensioni di β?

Trovare le correzioni a tutti i livelli energetici al prim'ordine in ϵ.

Scrivere l'espressione per la correzione al livello fondamentale al second'ordine in ϵ.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{n\pi x}{a} , \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)) , \quad \hat{J}_\pm|\, j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|\, j, m \pm 1\rangle$$

Meccanica Quantistica
8 Settembre 2015

Esercizio 1

Al tempo $t = 0$ sia data la funzione d'onda:

$$\psi(x) = Ae^{-\frac{|x|}{2}} \, .$$

Si trovi la costante di normalizzazione A.

Il sistema evolva con l'hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} - \alpha x \, ,$$

essendo α una costante reale. Si scrivano e si risolvano le equazioni di Heisenberg per posizione e impulso. Si usi questo risultato per trovare i valori medi di posizione e impulso al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin 1/2 interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = a(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) + b(S_1^z S_2^z)^2 \, ,$$

essendo $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$, $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$ gli operatori relativi alle componenti x, y, z dello spin rispettivamente della prima e della seconda particella ed essendo a, b costanti reali.

a) Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

b) Se a $t = 0$ il sistema si trova nell'autoket di S_1^z e S_2^z agli autovalori $\frac{\hbar}{2}$, trovare lo stato del sistema al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω. Il sistema sia perturbato da un potenziale della forma

$$V(x) = \hbar\omega \, \epsilon \, [\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2] \, ,$$

essendo $\epsilon \ll 1$. Si determini:

a) Lo spostamento al primo ordine in ϵ del livello energetico n-esimo.

b) Lo spostamento al secondo ordine in ϵ del livello energetico n-esimo.

[10 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)) \, , \quad , \quad \hat{J}_\pm | \, j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} | \, j, m \pm 1\rangle$$

Meccanica Quantistica 1
21 Luglio 2015

Esercizio 1

Dato un oscillatore armonico unidimensionale, si consideri lo stato

$$|\psi_0\rangle = e^{\frac{i\ell\hat{x}}{\hbar}}|0\rangle$$

con ℓ costante reale.
a) Si calcolino i valori medi:

$$\langle\psi_0|\hat{x}|\psi_0\rangle\,, \quad \langle\psi_0|\hat{p}|\psi_0\rangle\,, \quad \langle\psi_0|\hat{x}^2|\psi_0\rangle\,, \quad \langle\psi_0|\hat{p}^2|\psi_0\rangle\,.$$

b) Si verifichi che il principio di indeterminazione è soddisfatto.

[10 punti]

Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin 1/2 interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = a(S_1^y S_2^y + S_1^z S_2^z)\,,$$

essendo S_1^y, S_2^y, S_1^z, S_2^z gli operatori relativi alle componenti y e z dello spin della prima e della seconda particella ed essendo a una costante positiva.
a) Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.
b) Se a $t=0$ il sistema si trova nell'autoket di S_1^z e S_2^z agli autovalori $\frac{\hbar}{2}$, trovare lo stato del sistema al tempo t.

[9 punti]

Esercizio 3

Sia data l'hamiltoniana imperturbata

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$$

con δ reale. Si consideri la perturbazione

$$V = A\epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con A costante e $\epsilon \ll 1$. Usando la teoria delle perturbazioni, si trovino le correzioni ai livelli energetici al primo e al second'ordine in ϵ. Si confronti il risultato così trovato con la diagonalizzazione esatta di $H_0 + V$.

[11 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \hat{J}_\pm|\,j,m>= \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|\,j,m\pm 1>$$

Meccanica Quantistica 1

16 Giugno 2015

Esercizio 1

Dato un oscillatore armonico unidimensionale, si consideri lo stato

$$|\psi_0\rangle = e^{\frac{i\ell\hat{p}}{\hbar}}|0\rangle \,,$$

dove ℓ è una costante reale.

a) Si calcolino i valori medi:

$$\langle\psi_0|\hat{x}|\psi_0\rangle \,, \quad \langle\psi_0|\hat{p}|\psi_0\rangle \,, \quad \langle\psi_0|\hat{x}^2|\psi_0\rangle \,, \quad \langle\psi_0|\hat{p}^2|\psi_0\rangle \,.$$

b) Si verifichi che il principio di indeterminazione è soddisfatto.

[10 punti]

Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin 1/2 interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = a(S_1^x S_2^x + S_1^y S_2^y) \,,$$

essendo S_1^x, S_2^x, S_1^y, S_2^y gli operatori relativi alle componenti x e y dello spin della prima e della seconda particella ed essendo a una costante positiva.

a) Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

b) Se a $t = 0$ il sistema si trova nell'autoket di S_1^z e S_2^z agli autovalori $\frac{\hbar}{2}$, trovare lo stato del sistema al tempo t.

[9 punti]

Esercizio 3

Sia data l'hamiltoniana imperturbata

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & i\delta \\ -i\delta & 0 \end{pmatrix}$$

dove δ è una costante reale. Si consideri la perturbazione

$$V = A\epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con A costante reale e $\epsilon \ll 1$. Usando la teoria delle perturbazioni, si trovino le correzioni ai livelli energetici al primo e al second'ordine in ϵ. Si confronti il risultato così trovato con la diagonalizzazione esatta di $H_0 + V$.

[11 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)) \,, \quad \hat{J}_\pm|\,j,m >= \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|\,j,m \pm 1 >$$

Meccanica Quantistica 1
13 Aprile 2015

Esercizio 1

Dato un oscillatore armonico unidimensionale, si consideri lo stato al tempo $t=0$:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + i|2\rangle\right) .$$

Si trovino i valori medi di $\hat{x}$, $\hat{p}$, $\hat{x}^2$, $\hat{p}^2$.

Si scriva lo stato al tempo t e si trovino i valori medi di $\hat{x}$, $\hat{p}$, $\hat{x}^2$, $\hat{p}^2$ al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 2

Siano date due particelle distinguibili di spin 1/2. Si supponga che l'hamiltoniana che le descrive abbia la forma

$$H = -a(\vec{S}_1 + 2\vec{S}_2)^2 + bS_1^z S_2^z ,$$

essendo a, b costanti reali e $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$, $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$ rispettivamente gli operatori di spin della prima e della seconda particella. Determinare autovalori e autoket dell'hamiltoniana.

Si supponga poi che al tempo $t=0$ il sistema si trovi nello stato autoket simultaneo di S_1^z all'autovalore $\hbar/2$ e di S_2^z all'autovalore $-\hbar/2$. Si trovi l'evoluto di tale stato al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Si consideri una buca di potenziale infinita estesa da 0 ad a.

Si consideri la perturbazione

$$V = \epsilon E \sin\frac{\pi x}{a} ,$$

essendo $\epsilon \ll 1$ e E una costante delle dimensioni di un'energia. Si trovino le correzioni a tutti i livelli energetici al prim'ordine in ϵ.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a} , \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)) , \quad \hat{J}_\pm |\, j, m >= \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|\, j, m\pm 1 >$$

Meccanica Quantistica 1
18 Febbraio 2015

Esercizio 1

Si consideri lo stato descritto dalla funzione d'onda in rappresentazione delle coodinate definita da

$$\psi(x) = A \quad \text{per} \quad -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}\,, \quad \psi(x) = 0 \quad \text{altrove}\,,$$

essendo a una costante. Si trovino la costante di normalizzazione A e i valori medi di x e x^2.

Si scriva la funzione d'onda in rappresentazione degli impulsi.

Si supponga che lo stato evolva nel tempo con l'hamiltoniana libera $H = \frac{p^2}{2m}$. Si scriva la funzione d'onda in rappresentazione degli impulsi al tempo t e la si usi per trovare il valor medio della posizione al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 2

Siano date due particelle distinguibili di spin 1/2. Si supponga che l'hamiltoniana che le descrive abbia la forma

$$H = -a(\vec{S}_1 - \vec{S}_2)^2 + b(S_1^z - S_2^z)^2\,,$$

essendo a, b costanti reali e $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$, $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$ rispettivamente gli operatori di spin della prima e della seconda particella. Determinare autovalori e autoket dell'hamiltoniana.
Si supponga poi che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato autoket simultaneo di S_1^x all'autovalore $\hbar/2$ e di S_2^z all'autovalore $\hbar/2$. Si trovi l'evoluto di tale stato al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Si consideri una particella di spin 1/2. Date le tre matrici di Pauli $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, si supponga che la sua hamiltoniana sia

$$H_0 = E e^{\sigma_z}\,,$$

con E una costante delle dimensioni di un'energia. Si trovino autoket e autovalori di H_0.

Si supponga ora che H_0 sia perturbata dall'operatore

$$V = \epsilon E e^{\sigma_x}\,, \quad \epsilon \ll 1\,.$$

Si trovino gli autovalori di $H_0 + V$ al primo e al secondo ordine in ϵ.

[10 punti]

Formule utili:

$$\hat{J}_\pm |\, j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\,|\, j, m \pm 1\rangle$$

Meccanica Quantistica 1

2 Febbraio 2015

Esercizio 1

Sia data la funzione d'onda unidimensionale

$$\psi(x) = Ae^{-\alpha\frac{x^2}{2}}$$

con $\alpha > 0$. Si trovino la costante di normalizzazione A e i valori medi di posizione e impulso.

La funzione d'onda evolva nel tempo secondo l'hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\,,$$

dove $m > 0$ e ω è reale. Scrivere come evolvono nel tempo i valori medi di posizione e impulso e le loro dispersioni.

La funzione d'onda $\psi(x)$ è autofunzione dell'hamiltoniana H?

[10 punti]

Esercizio 2

Siano date due particelle distinguibili di spin 1/2. Si supponga che l'hamiltoniana che le descrive abbia la forma

$$H = -a(\vec{S}_1 - \vec{S}_2)^2 + b\hbar(S_1^z - S_2^z)\,,$$

essendo a, b costanti reali e $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$, $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$ rispettivamente gli operatori di spin della prima e della seconda particella. Determinare autovalori e autoket dell'hamiltoniana.
Si supponga poi che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato autoket simultaneo di S_1^x all'autovalore $\hbar/2$ e di S_2^x all'autovalore $-\hbar/2$. Si trovi l'evoluto di tale stato al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

In una buca di potenziale infinita bidimensionale quadrata di lato a, si consideri la perturbazione

$$V(x) = \epsilon xy\,,$$

essendo $\epsilon \ll 1$. Si determini la correzione al prim'ordine in ϵ del livello fondamentale e del primo livello eccitato.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\,, \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \hat{J}_\pm|\,j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|\,j,m\pm 1\rangle$$

Meccanica Quantistica
20 Novembre 2014

Esercizio 1

Dato un oscillatore armonico unidimensionale si consideri lo stato

$$|\psi\rangle = \cos\alpha|0\rangle + \sin\alpha e^{i\beta}|1\rangle\,,$$

essendo α, β costanti arbitrarie. Si determinino come funzioni di α e di β i valori medi di posizione e impulso sullo stato $|\psi\rangle$.

Si trovino i valori medi di posizione e impulso al tempo t usando lo schema di Heisenberg.

[12 punti]

Esercizio 2

Siano date due particelle distinguibili di spin 1/2. Si supponga che l'hamiltoniana che descrive la loro interazione sia

$$H = aS_1^x S_2^x + bS_1^z S_2^z\,,$$

essendo a, b costanti reali e $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$, $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$ rispettivamente gli operatori di spin della prima e della seconda particella. Si trovino autovalori e autovettori di H.

Se al tempo $t = 0$ il sistema si trova nell'autoket simultaneo di S_1^z all'autovalore $\hbar/2$ e di S_2^z all'autovalore $\hbar/2$, trovare lo stato del sistema al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Una buca di potenziale infinita in una dimensione di larghezza a sia perturbata da un potenziale della forma

$$V = \epsilon x\,.$$

Determinare la correzione al prim'ordine in teoria perturbativa di tutti i livelli imperturbati.

[8 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\,, \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \hat{J}_\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|j,m\pm 1\rangle$$

Meccanica Quantistica

2 Settembre 2014

Esercizio 1

Si consideri al tempo $t = 0$ lo stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = Ae^{-x^2+2x}\,.$$

Si determini la costante di normalizzazione A e quindi si determinino i valori medi dell'impulso e della posizione.

Lo stato in questione evolve con l'hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} - Fx\,,$$

dove F è una costante. Si trovino quindi i valori medi della posizione e dell'impulso ad un generico istante di tempo t.

[10 punti]

Esercizio 2

Siano date due particelle distinguibili di spin 1/2. Si supponga che l'hamiltoniana che le descrive abbia la forma

$$H = -a(\vec{S}_1 - \vec{S}_2)^2 + b\hbar S_1^z S_2^z\,,$$

essendo a, b costanti reali e $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$, $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$ rispettivamente gli operatori di spin della prima e della seconda particella. Determinare autovalori e autoket dell'hamiltoniana.
Si supponga poi che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato autoket simultaneo di S_1^z all'autovalore $\hbar/2$ e di S_2^z all'autovalore $\hbar/2$. Si trovi l'evoluto di tale stato al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Un'oscillatore armonico bidimensionale, descritto quindi dall'hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)\,,$$

è perturbato dal termine

$$V = \epsilon\alpha(xp_y - yp_x)\,,$$

essendo α una costante e $\epsilon \ll 1$. Si trovino le correzioni al prim'ordine in ϵ del livello fondamentale e del primo livello eccitato.

[10 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \hat{J}_\pm|\,j, m >= \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|\,j, m \pm 1 >$$

Meccanica Quantistica
22 Luglio 2014

Esercizio 1

Sia data una buca di potenziale infinita estesa da 0 ad a. Si consideri lo stato a $t = 0$:

$$\psi(x) = A \sin\frac{\pi x}{a}\left(2\cos\frac{\pi x}{a} + 1\right) ,$$

essendo A una costante.
1) Trovare la costante di normalizzazione A.
2) Trovare lo stato evoluto al tempo t.
3) Trovare il valor medio della posizione al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 2

Siano date due particelle di spin 1/2 e si consideri lo stato in cui il loro spin totale è 1 e la componente z del loro spin totale è zero. Determinare su tale stato i valori medi di

$$H_{xx} = S_1^x S_2^x\,, \quad H_{xz} = S_1^x S_2^z\,, \quad H_{zz} = S_1^z S_2^z\,,$$

essendo $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$, $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$ rispettivamente gli operatori di spin relativi alla prima e alla seconda particella.

[10 punti]

Esercizio 3

Sia dato un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω. Si supponga che l'hamiltoniana sia perturbata dal termine

$$V = \epsilon\alpha(\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger)\,,$$

essendo α una costante e essendo $\epsilon \ll 1$ ($\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$ sono gli operatori di creazione e distruzione).

Si trovino le correzioni agli autovalori al primo e al secondo ordine in ϵ.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\,, \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x}+i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \hat{J}_\pm|\,j,m> = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|\,j,m\pm1>$$

Meccanica Quantistica
10 Giugno 2014

Esercizio 1

Sia dato un oscillatore armonico unidimensionale. Si consideri lo stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\phi}|1\rangle\right) ,$$

dove ϕ è una fase arbitraria.
1) Si trovino i valori medi di posizione, impulso, energia cinetica e energia potenziale.
2) Si verifichi la validità del principio di indeterminazione.

[12 punti]

Esercizio 2

Siano date due particelle distinguibili di spin 1/2. Si supponga che l'hamiltoniana che le descrive abbia la forma

$$H = -a(\vec{S}_1 - \vec{S}_2)^2 + b\hbar S_1^z ,$$

essendo a, b costanti reali e $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$, $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$ rispettivamente gli operatori di spin della prima e della seconda particella. Determinare autovalori e autoket dell'hamiltoniana.
Si supponga poi che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato autoket simultaneo di S_1^z all'autovalore $\hbar/2$ e di S_2^z all'autovalore $-\hbar/2$. Si trovi l'evoluto di tale stato al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

In una buca di potenziale infinita unidimensionale estesa da 0 ad a, si consideri la perturbazione

$$V(x) = \epsilon V_0 \quad \text{per} \quad \frac{a}{3} < x < \frac{2a}{3} \quad ; \quad V(x) = 0 \quad \text{altrove} ,$$

essendo $\epsilon \ll 1$. Si determini la correzione al prim'ordine in ϵ di tutti i livelli.

[8 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{n\pi x}{a} , \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)) , \quad \hat{J}_\pm |\, j, m >= \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |\, j, m\pm 1 >$$

Meccanica Quantistica
8 Aprile 2014

Esercizio 1

Sia dato un oscillatore armonico unidimensionale. Si determini lo stato $|\psi\rangle$ tale che:
1) una misura dell'energia dia il valore $\hbar\omega/2$ con probabilità 1/4 e $3\hbar\omega/2$ con probabilità 3/4;
2) il valor medio della posizione nello stato $|\psi\rangle$ sia zero.
Si determinino poi l'evoluto temporale di $|\psi\rangle$ al tempo t e il valor medio dell'energia potenziale al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 2

Siano date due particelle distinguibili di spin 1. Si supponga che l'hamiltoniana che le descrive abbia la forma

$$H = A\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \,,$$

essendo A una costante reale e $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$, $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$ rispettivamente gli operatori di spin della prima e della seconda particella. Determinare autovalori e autoket dell'hamiltoniana.
Si supponga poi che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato autoket simultaneo di S_1^z all'autovalore $\hbar$ e di S_2^z all'autovalore zero. Si trovi l'evoluto di tale stato al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Data una particella di spin 1, si supponga che sia descritta dall'hamiltoniana

$$H_0 = AS^2 + B\hbar S_z \,,$$

essendo A, B costanti reali non nulle e S^2, S_z rispettivamente il quadrato e la componente z dello spin.
Si trovino autostati e autovalori di H_0. Si supponga poi che H_0 sia perturbata dall'operatore

$$V = \epsilon C\hbar S_x \,, \quad \epsilon \ll 1 \,,$$

con C costante reale e S_x componente x dello spin. Si trovino le correzioni agli autovalori al primo e al secondo ordine in ϵ.

[10 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)) \,, \quad \hat{J}_\pm | \, j, m >= \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} | \, j, m \pm 1 >$$

Meccanica Quantistica
13 Febbraio 2014

Esercizio 1

Si consideri una buca di potenziale infinita unidimensionale estesa da 0 ad a (ossia il potenziale è zero per $0 < x < a$ e infinito altrove). Si supponga che la funzione d'onda al tempo $t = 0$ sia

$$\psi_{t=0}(x) = A \sin\frac{\pi x}{a} \cos\frac{2\pi x}{a} \, .$$

1) Si trovi la costante A.
2) Se si misura l'energia quali valori si possono trovare e con quali probabilità?
3) Trovare l'evoluto temporale al tempo t dello stato descritto da $\psi_{t=0}(x)$.
4) Trovare il valor medio della posizione al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin 1/2 interagiscono con l'hamiltoniana

$$H = a\left[(\vec{S}_1 + \vec{S}_2) + \hbar\vec{a}\right]^2 \, ,$$

essendo $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$, $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$ rispettivamente gli operatori di spin relativi alla prima e alla seconda particella e $a = (0, 0, 1)$ un versore diretto lungo l'asse z.
1) Trovare autoket e autovalori dell'hamiltoniana.
2) Se a $t = 0$ il sistema si trova nell'autoket simultaneo di S_1^x all'autovalore $\frac{\hbar}{2}$ e di S_2^x all'autovalore $\frac{\hbar}{2}$, trovare lo stato del sistema al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Una particella di spin 1/2 sia descritta dall'hamiltoniana

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \omega S^z \, ,$$

essendo $\hat{p}$ l'operatore impulso, $\hat{x}$ l'operatore posizione e S^z la componente z dell'operatore di spin.
1) Si trovino autoket e autovalori dell'hamiltoniana.
2) Il sistema sia poi perturbato da un potenziale

$$V = \epsilon\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,\hat{x}\,S^x \, ,$$

essendo $\hat{x}$ l'operatore posizione, S^x la componente x dell'operatore di spin ed essendo $\epsilon \ll 1$. Si trovi la correzione al prim'ordine di tutti i livelli energetici imperturbati determinati nel punto 1).

[10 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)) \, , \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$\hat{J}_\pm|\, j, m >= \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|\, j, m \pm 1 >$$

Meccanica Quantistica
30 Gennaio 2014

Esercizio 1

Si consideri l'hamiltoniana unidimensionale

$$\hat{H} = \alpha(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})$$

essendo α una costante reale delle dimensioni dell'inverso di un tempo e $\hat{x}$, $\hat{p}$ gli operatori impulso e posizione, rispettivamente.
1) Scrivere e risolvere le equazioni di Heisenberg per $\hat{x}$ e $\hat{p}$.
2) Dimostrare che il prodotto delle dispersioni $\Delta\hat{x}^2\Delta\hat{p}^2$ non dipende dal tempo.
3) Scrivere l'operatore di evoluzione temporale $U = e^{-\frac{it\hat{H}}{\hbar}}$ in rappresentazione delle coordinate e trovare l'evoluto al tempo t di un generico stato descritto a $t = 0$ dalla funzione d'onda $\psi(x)$.
4) Scrivere l'operatore di evoluzione temporale $U = e^{-\frac{it\hat{H}}{\hbar}}$ in rappresentazione degli impulsi e trovare l'evoluto al tempo t di un generico stato descritto a $t = 0$ dalla funzione d'onda $\phi(p)$.

[10 punti]

Esercizio 2

Una particella di spin 1/2 e una di spin 1 interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = a\vec{S} \cdot \vec{L} + b\hbar(S_x + L_x)\,,$$

essendo $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$, $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ rispettivamente gli operatori di spin relativi alla prima e alla seconda particella.
a) Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.
b) Se a $t = 0$ il sistema si trova nell'autoket simultaneo di S_z all'autovalore $\frac{\hbar}{2}$ e di L_z all'autovalore $\hbar$, trovare lo stato del sistema al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Si consideri l'Hamiltoniana in due dimensioni (oscillatore armonico più perturbazione):

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + \epsilon\omega(xp_y - yp_x)$$

essendo $\epsilon \ll 1$.
Determinare la correzione al prim'ordine dei tre livelli energetici più bassi.

[10 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \hat{J}_\pm |\, j, m >= \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|\, j, m \pm 1 >$$

Meccanica Quantistica
20 Novembre 2013

Esercizio 1

Determinare lo stato di un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω in cui
- una misura dell'energia fornisce solo i valori $\frac{\hbar\omega}{2}$ e $3\frac{\hbar\omega}{2}$ e in media dà $\hbar\omega$;
- il valor medio della posizione sia zero.

Si verifichi poi che per questo stato il principio di indeterminazione di Heisenberg è soddisfatto.

[12 punti]

Esercizio 2

Siano date due particelle di spin 1/2 e si consideri lo stato in cui il loro spin totale è 0. Determinare su tale stato i valori medi di

$$H_{xx} = S_1^x S_2^x\,, \quad H_{xy} = S_1^x S_2^y\,,$$

essendo $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$, $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$ rispettivamente gli operatori di spin relativi alla prima e alla seconda particella.

[8 punti]

Esercizio 3

Si consideri una buca di potenziale infinita unidimensionale di larghezza a (ossia il potenziale è zero per $0 < x < a$ e infinito altrove). Il sistema sia perturbato da un potenziale della forma

$$V(x) = \epsilon V_0\,, \quad 0 < x < \frac{a}{2} \quad , \quad V(x) = 0 \quad \text{altrove}\,,$$

essendo $\epsilon \ll 1$.

1) Si determini lo spostamento al prim'ordine in ϵ del livello energetico n-esimo.

2) Si scriva l'espressione per lo spostamento al second'ordine in ϵ del livello energetico fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x}+i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\,, \quad \hat{J}_\pm|\,j,m>=\hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|\,j,m\pm 1>$$

Meccanica Quantistica
19 Giugno 2013

Esercizio 1

Sia consideri una particella di spin 1 soggetta all'hamiltoniana

$$H_0 = A\vec{S}^2 + B\hbar S_z\,,$$

essendo $\vec{S}^2$ il quadrato dello spin e S_z la sua componente z.

1) Si scriva la matrice rappresentativa di H_0.

2) L'Hamiltoniana H_0 sia perturbata da un termine proporzionale alla componente x dello spin: la nuova hamiltoniana sia quindi

$$H = H_0 + \epsilon C S_x$$

dove C è una costante e $\epsilon \ll 1$. Si determini lo spostamento dei livelli energetici al primo e al secondo ordine in ϵ.

[10 punti]

Esercizio 2

Tra tutti gli stati di un oscillatore armonico unidimensionale si determini lo stato in cui

• una misura dell'energia può dare il valore $\frac{\hbar\omega}{2}$ con probabilità 1/2 e il valore $\frac{3\hbar\omega}{2}$ con probabilità 1/2

• il valore della dispersione Δx^2 dell'operatore coordinata assume il valore massimo possibile.

Verificare che sullo stato determinato è valido il principio di indeterminazione di Heisenberg.

Determinare, infine, l'evoluto temporale al tempo t dello stato costruito.

[11 punti]

Esercizio 3

Una particella di spin 1 e una di spin 1/2 interagiscono con l'hamiltoniana

$$H = A\vec{L}\cdot\vec{S}\,,$$

dove $\vec{L} = (L^x, L^y, L^z)$ indica gli operatori di spin 1 e $\vec{S} = (S^x, S^y, S^z)$ gli operatori di spin 1/2. Se al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato

$$|L^z = 0\rangle|S^z = \hbar/2\rangle\,,$$

trovare lo stato al tempo t.

[9 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \hat{J}_\pm|\,j,m >= \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|\,j,m\pm 1 >$$

Meccanica Quantistica
12 Aprile 2013

Esercizio 1

Tra tutti gli stati di un oscillatore armonico unidimensionale di frequenza ω si determini lo stato in cui:
1) la misura dell'energia può dare il valore $\frac{\hbar\omega}{2}$ con probabilità 1/3 e il valore $\frac{3\hbar\omega}{2}$ con probabilità 2/3
2) compatibilmente con la richiesta di cui al punto 1) il valor medio della posizione assume il valore massimo possibile.

Si scriva infine l'evoluto temporale dello stato trovato al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin 1/2 interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = aS_1^x S_2^x\,,$$

essendo S_1^x, S_2^x rispettivamente gli operatori relativi alla componente x dello spin della prima particella e alla componente x dello spin della seconda particella ed essendo a una costante positiva.
a) Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana (suggerimento: usare la base che diagonalizza simultaneamente gli operatori S_1^z, S_2^z).
b) Se a $t = 0$ il sistema si trova nell'autoket simultaneo di S_1^z all'autovalore $\frac{\hbar}{2}$ e di S_2^z all'autovalore $\frac{\hbar}{2}$, trovare lo stato del sistema al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Sia data l'hamiltoniana in rappresentazione matriciale:

$$H = A\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

essendo A una costante con le dimensioni di un'energia. Si trovino autovalori e autovettori di H.

L'Hamiltoniana H sia perturbata dal potenziale V:

$$V = A\begin{pmatrix} 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

essendo $\epsilon \ll 1$. Si determinino gli spostamenti dei livelli energetici al primo e al secondo ordine in ϵ.

[10 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \hat{J}_\pm|\,j,m>= \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|\,j,m \pm 1>$$

Meccanica Quantistica
22 Febbraio 2013

Esercizio 1

Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e frequenza ω sia perturbato dal termine

$$V = V_0 \epsilon (\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}) \,, \quad \epsilon \ll 1 \,.$$

Si scrivano le correzioni ai livelli energetici imperturbati al primo e al secondo ordine in ϵ.

[10 punti]

Esercizio 2

Si considerino due particelle distinguibili di spin 1/2 interagenti con l'hamiltoniana

$$H = -A\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + B(S_1^x + S_2^x)^2 \,.$$

Trovare autovalori e autovettori dell'hamiltoniana. Se la tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|+\rangle|-\rangle$ ($S^z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$) trovare lo stato al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Sia data un'Hamiltoniana in tre dimensioni

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(|\vec{x}|) \,.$$

1) Si calcoli il commutatore $[\vec{x} \cdot \vec{p},\, H]$.
2) Si usi il risultato di cui al punto 1) per dimostrare che

$$\langle \psi_E | \frac{\vec{p}^{\,2}}{m} | \psi_E \rangle = \langle \psi_E | \vec{x} \cdot \vec{\nabla} V | \psi_E \rangle \tag{0.1}$$

essendo $|\psi_E\rangle$ autoket dell'Hamiltoniana H.
3) Si verifichi la giustezza della relazione (0.1) per lo stato fondamentale dell'atomo di idrogeno. Formula utile:

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}} \,, \quad r = |\vec{x}| \,, \quad a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}$$

[10 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)) \,, \quad \hat{J}_\pm |\, j, m >= \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |\, j, m \pm 1 >$$

Meccanica Quantistica
13 Febbraio 2013

Esercizio 1

Sia dato un oscillatore armonico unidimensionale e si consideri lo stato

$$|\psi\rangle_\alpha = e^{\frac{i\hat{p}\alpha}{\hbar}}|0\rangle\,.$$

1) Si scrivano la funzione d'onda relativa allo stato $|\psi\rangle_\alpha$ nella rappresentazione delle coordinate e degli impulsi.
2) Si dimostri che la relazione di indeterminazione $\Delta\hat{x}^2\Delta\hat{p}^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$ è soddisfatta.
3) Si calcoli la quantità:

$$\langle 0|e^{\frac{i\hat{p}\alpha}{\hbar}}|0\rangle\,.$$

3) Si valutino i coefficienti

$$c_n = \langle n|\psi\rangle_\alpha$$

essendo $|n\rangle$ autoket dell'Hamiltoniana. Si verifichi la relazione $\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n|^2 = 1$.

[12 punti]

Esercizio 2

Si considerino due particelle distinguibili di spin 1/2 interagenti con l'hamiltoniana

$$H_0 = -A\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2$$

Tale hamiltoniana sia perturbata da un potenziale

$$V = \varepsilon A\hbar S_x\,,\quad \varepsilon \ll 1\,,$$

essendo S_x la componente x dello spin totale $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$. Si scrivano le energie del sistema al prim'ordine in ε e si confronti tale risultato con il risultato esatto.

[9 punti]

Esercizio 3

Si considerino due particelle identiche di spin 1/2 in una buca di potenziale infinita di larghezza a. Si scriva la funzione d'onda completa (funzione delle coordinate e funzione di spin) degli stati fondamentali nel caso in cui lo spin totale delle due particelle sia $2\hbar^2$ e nel caso in cui lo spin totale delle due particelle sia zero. Si scrivano anche i corrispondenti valori dell'energia del sistema delle due particelle. Si considerino ora N particelle identiche di spin 1/2 e si supponga che ciascuna di esse sia nello stato $|+\rangle$. Si scriva un'espressione dell'energia dello stato fondamentale. Si valuti tale energia nel limite $N\to\infty$.

[9 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\,,\quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x}+i\hat{p}/(m\omega))\,,\quad \hat{J}_\pm|\,j,m> = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|\,j,m\pm1>$$

Meccanica Quantistica
21 Novembre 2012

Esercizio 1

Tra tutti gli stati di un oscillatore armonico unidimensionale di frequenza ω si determini lo stato in cui:
1) la misura dell'energia può dare il valore $\frac{\hbar\omega}{2}$ con probabilità 1/2 e il valore $\frac{3\hbar\omega}{2}$ con probabilità 1/2
2) compatibilmente con la richiesta di cui al punto 1) il valor medio della posizione assume il valore massimo possibile.

Si scriva infine l'evoluto temporale dello stato trovato al tempo t.

[9 punti]

Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin 1/2 interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = aS_1^z S_2^x ,$$

essendo S_1^z, S_2^x rispettivamente gli operatori relativi alla componente z dello spin della prima particella e alla componente x dello spin della seconda particella ed essendo a una costante positiva.
a) Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana (suggerimento: usare la base che diagonalizza simultaneamente gli operatori S_1^z, S_2^z).
b) Se a $t = 0$ il sistema si trova nell'autoket simultaneo di S_1^z all'autovalore $\frac{\hbar}{2}$ e di S_2^z all'autovalore $\frac{\hbar}{2}$, trovare lo stato del sistema al tempo t.

[9 punti]

Esercizio 3

Sia data l'hamiltoniana in rappresentazione matriciale:

$$H = A \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

essendo A una costante con le dimensioni di un'energia. Si trovino autovalori e autovettori di H.

L'Hamiltoniana H sia perturbata dal potenziale V:

$$V = A \begin{pmatrix} 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

essendo $\epsilon \ll 1$. Si determinino gli spostamenti dei livelli energetici al primo e al secondo ordine in ϵ.

[12 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)) , \quad \hat{J}_\pm | j, m >= \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} | j, m \pm 1 >$$

Meccanica Quantistica
4 Settembre 2012

Esercizio 1

Sia dato un oscillatore armonico bidimensionale:

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)\,.$$

1) Si determini lo spettro energetico e la degenerazione dei livelli.
Si perturbi l'hamiltoniana $\hat{H}_0$ con un potenziale proporzionale all'operatore $\hat{x}\hat{y}$:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \epsilon\lambda\hat{x}\hat{y}\,,$$

essendo λ una costante finita e $\epsilon \ll 1$.
2) Trovare lo spostamento fino al second'ordine in ϵ del livello energetico fondamentale.
3) Trovare lo spostamento al prim'ordine in ϵ del primo livello eccitato.

[12 punti]

Esercizio 2

Sia data una buca di potenziale infinita di larghezza a. Si consideri la funzione d'onda

$$\psi(x) = A \sin\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\,.$$

1) Si determini la costante di normalizzazione A.
2) Quali valori di energia si possono ottenere nello stato descritto da $\psi(x)$ e con quali probabilità si presentano?
3) Si scriva l'evoluta temporale al tempo t della funzione $\psi(x)$.

[9 punti]

Esercizio 3

Si considerino due particelle distinguibili di spin 1/2. Si indichino con $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$ e $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$ gli operatori di spin delle due particelle e con $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ il loro spin totale $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$. Si supponga che esse si trovino nell'autostato simultaneo di $\vec{S}^2$ e di S_z agli autovalori $2\hbar^2$ e 0 rispettivamente: trovare su questo stato i valori medi di $S_1^x S_2^x$, $S_1^y S_2^y$ e $S_1^z S_2^z$.

[9 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\,, \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x}+i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \hat{J}_\pm|\,j,m> = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|\,j,m\pm 1>$$

Meccanica Quantistica
10 Luglio 2012

Esercizio 1

Sia data una buca di potenziale infinita unidimensionale:

$$V(x) = 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < a\,, \quad V(x) = +\infty \quad \text{altrove}\,.$$

Al tempo $t = 0$ il sistema sia descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = Ax \quad \text{per} \quad 0 < x < \frac{a}{2}\,, \quad \psi(x) = A(a - x) \quad \text{per} \quad \frac{a}{2} < x < a\,,$$

essendo A una costante positiva.

1) Trovare la costante A.

2) Se si misura l'energia sullo stato descritto da $\psi(x)$, quali valori si possono ottenere e con quali probabilità?

3) Trovare il valor medio dell'osservabile posizione nello stato descritto da $\psi(x)$.

4) Si faccia evolvere nel tempo lo stato. Si calcoli quindi il valor medio dell'osservabile posizione al tempo t.

[12 punti]

Esercizio 2

Sia dato un oscillatore armonico unidimensionale la cui hamiltoniana sia perturbata da un termine $\lambda\epsilon\hat{x}^3$, essendo $\epsilon \ll 1$:

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \lambda\epsilon\hat{x}^3\,.$$

Si determini lo spostamento al primo e al second'ordine in ϵ del livello energetico fondamentale.

[8 punti]

Esercizio 3

Si considerino due particelle distinguibili di spin 1/2 interagenti attraverso l'hamiltoniana:

$$H = A\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + B(S_1^y S_2^y + S_1^z S_2^z)\,,$$

dove A e B sono costanti e $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ indicano rispettivamente gli operatori di spin della prima e della seconda particella.

1) Si trovino autovalori e autoket dell'hamiltoniana.

2) Se al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|-\rangle|-\rangle$, trovare lo stato al tempo t.

3) Se al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|-\rangle|-\rangle$, trovare il valor medio di S_1^z al tempo t.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\,, \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x}+i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \hat{J}_\pm|\,j,m >= \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|\,j,m\pm1 >$$

Meccanica Quantistica

14 Febbraio 2012

Esercizio 1

Sia data una buca di potenziale infinita unidimensionale:

$$V(x) = 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < a\,, \quad V(x) = +\infty \quad \text{altrove}\,.$$

Al tempo $t = 0$ il sistema sia descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A \quad \text{per} \quad -\epsilon < x < \epsilon\,, \quad 0 < \epsilon < a\,, \quad \psi(x) = 0 \quad \text{altrove}\,.$$

1) Trovare la costante A in funzione del parametro ϵ.

2) Se si misura l'energia sullo stato descritto da $\psi(x)$, quali valori si possono ottenere e con quali probabilità?

3) Si scriva la funzione d'onda al tempo t.

4) Si calcoli il valor medio dell'osservabile posizione al tempo t.

[12 punti]

Esercizio 2

Sia dato un oscillatore armonico unidimensionale la cui hamiltoniana sia perturbata da un termine $\lambda\epsilon\hat{x}^4$, essendo $\epsilon \ll 1$:

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \lambda\epsilon\hat{x}^4\,.$$

Si determini lo spostamento al prim'ordine in ϵ del livello energetico n-esimo.

[8 punti]

Esercizio 3

Si considerino due particelle distinguibili di spin 1/2 interagenti attraverso l'hamiltoniana:

$$H = A\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + B\,S_1^x S_2^x\,,$$

dove A e B sono costanti e $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ indicano rispettivamente gli operatori di spin della prima e della seconda particella.

1) Si trovino autovalori e autoket dell'hamiltoniana.

2) Se al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|+\rangle|+\rangle$, trovare lo stato al tempo t.

3) Se al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|+\rangle|+\rangle$, trovare il valor medio di S_1^z al tempo t.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\,, \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x}+i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \hat{J}_\pm|\,j,m>= \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|\,j,m\pm 1>$$