

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

15 Novembre 2023

- **problema 1 - buca di potenziale perturbata nel tempo - [10 punti]**

Si consideri una particella di massa  $m$ , che si trova nello stato fondamentale di una buca di potenziale unidimensionale, infinitamente profonda, di larghezza  $L$ . A partire dal tempo  $t = 0$ , viene accesa una perturbazione localizzata al centro della buca:

$$V(t) = V_0 \delta\left(x - \frac{L}{2}\right) e^{-\gamma t}.$$

1. Quali sono le dimensioni fisiche delle costanti  $V_0$  e  $\gamma$  ?
2. Calcolare, al primo ordine perturbativo in  $V_0$ , la probabilità che la particella si trovi nel primo stato eccitato al tempo  $t \gg \gamma^{-1}$ .
3. Ripetere il calcolo per il secondo stato eccitato.

- **problema 2 - Spin 1/2 - [10 punti]**

Si consideri una particella di spin  $S = 1/2$ . La sua dinamica sia descritta dall'Hamiltoniano  $\hat{H} = -\hbar\omega_0\sigma_z$ , dove  $\sigma_\alpha$ , con  $\alpha = x, y, z$ , sono le matrici di Pauli.

Al tempo  $t = 0$ , la particella si trova nell'autostato di  $\sigma_x$  con autovalore  $+1$ . Calcolare le probabilità, in funzione del tempo, per i due possibili risultati di una misura di  $\sigma_x$ ,  $P_1^{(x)}(t)$  e  $P_{-1}^{(x)}(t)$ .

- **problema 3 - particelle identiche - [10 punti]**

Due particelle identiche di massa  $m$  sono vincolate a muoversi in una dimensione, all'interno di un potenziale armonico di frequenza  $\omega$ .

1. Determinare gli autovalori e gli autoket relativi al livello fondamentale e al primo livello eccitato ed il relativo grado di degenerazione se le particelle hanno spin  $s = 0$ ;
2. Determinare gli autovalori e gli autoket relativi al livello fondamentale e al primo livello eccitato ed il relativo grado di degenerazione se le particelle hanno spin  $s = 1/2$ .

Formule utili:

autofunzioni per una buca infinita di potenziale :  $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

12 Settembre 2023

- **problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]**

Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale soggetto alla perturbazione  $\hat{V} = \gamma \hat{x}^3$ .

1. Mostrare che la correzione al primo ordine in  $\gamma$  agli autovalori  $\varepsilon_n$  dell'energia si annulla.
2. Calcolare la correzione al secondo ordine in  $\gamma$  per tutti gli autovalori dell'energia.
3. Quali sono le unità di misura di  $\gamma$ ? quale condizione deve essere verificata affinché la trattazione perturbativa sia sensata?

- **problema 2 - Spin 1/2 - [10 punti]**

Si consideri una particella di spin  $S = 1/2$ . La sua dinamica sia descritta dall'Hamiltoniano  $\hat{H} = -\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{S}}$ , dove  $\mathbf{b} = 2\omega_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Se al tempo  $t = 0$ , una misura di  $\hat{S}_z$  fornisce il valore  $+\hbar/2$ , calcolare il valor medio di  $\hat{S}_x$ ,  $\hat{S}_y$  ed  $\hat{S}_z$  in funzione del tempo.

- **problema 3 - particelle identiche - [10 punti]**

Due particelle identiche di spin 1 e massa  $m$  sono vincolate a muoversi in una dimensione, all'interno di una buca di potenziale infinita di lunghezza  $L$ .

1. Determinare gli autovalori e le autofunzioni del livello fondamentale e del primo livello eccitato ed il relativo grado di degenerazione.
2. Scrivere il più generale stato del sistema compatibile con le seguenti condizioni:
  - (a) il sistema si trova in un autostato dello spin totale con  $S = 0$ ;
  - (b) una misura dell'energia potrebbe fornire solo gli autovalori corrispondenti ai primi due livelli;
  - (c) il valor medio dell'energia è  $\langle H \rangle = 2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2}$ .

Formule utili:

autofunzioni per una buca infinita di potenziale:  $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

11 Luglio 2023

- **problema 1 - buca infinita - teoria delle perturbazioni - [10 punti]**

Si consideri una particella di carica  $q$  e massa  $m$ , confinata in una dimensione, in una buca di potenziale infinitamente profonda di estensione  $L$ . Essa viene perturbata da un campo elettrico statico e uniforme, parallelo all'asse del moto, di intensità  $E$ .

1. Scrivere l'espressione della perturbazione dovuta al campo elettrico.
2. Calcolare la correzione al primo ordine in  $E$  per tutti gli autovalori dell'energia.
3. Quale condizione deve essere soddisfatta da  $E$ , affinché la trattazione perturbativa sia sensata ?

- **problema 2 - Momento angolare - [10 punti]**

Un elettrone si trova in un autostato  $|j, m_j\rangle$  del momento angolare totale  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ . Per tale stato, si conosce il valore di  $m_j$  e quello di  $l$  (numero quantico relativo al modulo quadro del momento angolare).

1. Quali sono i possibili valori di  $j$ ?
2. Calcolare il valor medio della componente  $z$  del momento di dipolo magnetico  $\hat{\mu}_z = \frac{-e}{2m}(\hat{L}_z + 2\hat{S}_z)$ .

- **problema 3 - oscillatore armonico - [10 punti]**

Si consideri una particella di massa  $m$  in un potenziale armonico unidimensionale di frequenza  $\omega$ . Al tempo  $t = 0$ , la funzione d'onda della particella sia reale,  $\psi^*(x, t = 0) = \psi(x, t = 0)$ , e simmetrica rispetto all'origine (cioè pari),  $\psi(-x, t = 0) = \psi(x, t = 0)$ . Usando la rappresentazione di Heisenberg, calcolare la varianza della posizione al tempo  $t$ ,  $\delta x^2(t) = \langle \psi, t | \hat{x}^2 | \psi, t \rangle - (\langle \psi, t | \hat{x} | \psi, t \rangle)^2$ , esprimendola in termini di  $\langle x^2 \rangle_0 \equiv \langle \psi, 0 | \hat{x}^2 | \psi, 0 \rangle$  e  $\langle p^2 \rangle_0 \equiv \langle \psi, 0 | \hat{p}^2 | \psi, 0 \rangle$ .

Formule utili:

autofunzioni per una buca infinita di potenziale:  $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$

integrale utile:  $\int x \cos(\alpha x) dx = \frac{x}{\alpha} \sin(\alpha x) + \frac{1}{\alpha^2} \cos(\alpha x)$ .

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1 - anticipata

21 Giugno 2023

- **problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]**

Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale soggetto alla perturbazione

$$\hat{V} = \gamma(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}).$$

1. Mostrare che la correzione al primo ordine in  $\gamma$  agli autovalori  $\varepsilon_n$  dell'energia si annulla.
2. Calcolare la correzione al secondo ordine in  $\gamma$  per tutti gli autovalori dell'energia.
3. Quali sono le unità di misura di  $\gamma$ ? quale condizione deve essere verificata affinché la trattazione perturbativa sia sensata?

- **problema 2 - Spin 1/2 - [10 punti]**

Si consideri una particella di spin  $S = 1/2$ . La sua dinamica sia descritta dall'Hamiltoniano  $\hat{H} = \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{S}}$ , dove  $\mathbf{b} = \omega_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ . Se al tempo  $t = 0$ , una misura di  $\hat{S}_z$  fornisce il valore  $+\hbar/2$ , calcolare il valor medio di  $\hat{S}_x$  ed  $\hat{S}_z$  in funzione del tempo.

- **problema 3 - atomo di idrogeno - [10 punti]**

Lo stato dell'elettrone nell'atomo di idrogeno sia descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}(e^{i\varphi} \sin \theta + \cos \theta) g(r),$$

dove  $\theta$  e  $\varphi$  sono gli angoli sferici, mentre  $g(r)$  è una funzione radiale.

1. Quali sono i possibili risultati e le corrispondenti probabilità di una misura della componente  $L_z$  del momento angolare dell'elettrone?
2. Se lo stato è normalizzato, quanto vale l'integrale  $\int_0^\infty |g(r)|^2 r^2 dr$ ?

Formule utili:

$$\text{alcune armoniche sferiche: } Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi},$$

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

12 Aprile 2023

- **problema 1 - buca infinita - [10 punti]**

Una particella carica di massa  $m$  si trova confinata in una buca di potenziale unidimensionale estremamente profonda, corrispondente all'intervallo  $0 \leq x \leq L$ . Lungo l'asse del moto è applicato un campo elettrico uniforme, che dà luogo alla perturbazione  $\hat{V} = -\frac{V_0}{L}\hat{x}$ . Assumendo che tale perturbazione sia piccola, valutare la correzione al primo ordine perturbativo agli autovalori dell'energia.

Quale condizione deve valere per  $V_0$  affinché l'approccio perturbativo sia sensato,?

- **problema 2 - Spin 1 - [10 punti]**

Si consideri una particella di spin  $S = 1$ . La sua dinamica sia descritta dall'Hamiltoniano  $\hat{H} = \frac{\omega_0}{\hbar}(\hat{S}_x^2 - \hat{S}_y^2)$ . Se al tempo  $t = 0$ , una misura di  $\hat{S}_x$  fornisce il valore  $+\hbar$ , calcolare il valor medio di  $\hat{S}_x$  in funzione del tempo.

- **problema 3 - oscillatore armonico - [10 punti]**

Tra tutti gli stati di un oscillatore armonico unidimensionale di pulsazione  $\omega$ , si determini quello in cui

1. la misura dell'energia può dare il valore  $\hbar\omega/2$  con probabilità  $1/2$  e il valore  $3\hbar\omega/2$  con probabilità  $1/2$ ;
2. compatibilmente con la richiesta di cui al punto precedente, il valor medio della posizione assume il valore massimo possibile.

Infine, considerando tale stato come quello iniziale dell'evoluzione temporale, si ricavi il valor medio della posizione al generico tempo  $t > 0$ .

Formule utili:

autofunzioni per una buca infinita di potenziale :  $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

23 Febbraio 2023

## • problema 1 - buca infinita - [10 punti]

Un elettrone (massa  $m$ , carica  $q = -e$ ) si trova confinato in una buca di potenziale unidimensionale estremamente profonda, con  $0 \leq x \leq L$ . Lungo l'asse del moto è applicato un campo elettrico uniforme,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}u_x$ . Assumendo che tale campo costituisca una piccola perturbazione, valutare:

1. la correzione al primo ordine perturbativo agli autovalori dell'energia;
2. la correzione al primo ordine perturbativo alla funzione d'onda dello stato fondamentale.

Affinché l'approccio perturbativo sia sensato, quale condizione deve valere per  $\mathcal{E}$  ?

## • problema 2 - Momento angolare - [10 punti]

Si consideri un elettrone nel seguente stato (scritto nella rappresentazione della posizione e con i ket riferiti allo stato di spin):

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} Y_1^1(\theta, \varphi) |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}} Y_2^0(\theta, \varphi) |-\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}} Y_1^{-1}(\theta, \varphi) |+\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} Y_2^1(\theta, \varphi) |-\rangle.$$

1. Misurando  $J_z$ , quali possibili valori si possono ottenere ? con quali probabilità ?
2. Misurando  $|\mathbf{J}|^2$ , quali possibili valori si possono ottenere ? con quali probabilità ?

## • problema 3 - oscillatore armonico - [10 punti]

Un oscillatore armonico di massa  $m$  e frequenza  $\omega$  si trova, al tempo  $t = 0$ , in una configurazione che non contiene stati più eccitati del secondo livello energetico:

$$|\psi, 0\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle + \gamma |2\rangle.$$

Si sa, inoltre, che l'energia media vale  $\langle H \rangle = \frac{3}{4} \hbar \omega$  e che la posizione media non cambia nel tempo,  $\langle x(t) \rangle = \langle x(0) \rangle, \forall t$ .

1. Scrivere l'espressione dello stato più generale compatibile con le condizioni precedenti;
2. se si conoscesse anche il valor medio della quantità di moto,  $\langle p(t) \rangle$ , si potrebbe individuare univocamente lo stato ? e se, invece, si conoscesse  $\langle x^2(0) \rangle$ ?

Formule utili:

autofunzioni per una buca infinita di potenziale :  $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$

integrale utile:  $\int x \cos(\alpha x) dx = \frac{x}{\alpha} \sin(\alpha x) + \frac{1}{\alpha^2} \cos(\alpha x)$ .

coefficienti C.-G. :

$1 \times 1/2$	$3/2$	$3/2$	$1/2$		$2 \times 1/2$	$5/2$	$3/2$			
$+1$	$+1/2$	$-3/2$	$1$	$+1/2 + 1/2$	$+2$	$1/2$	$1$	$3/2 + 3/2$		
$+1$	$-1/2$	$1/3$	$2/3$	$3/2$	$1/2$	$-1/5$	$4/5$	$5/2$	$3/2$	
$0$	$+1/2$	$2/3$	$-1/3$	$-1/2$	$-1/2$	$4/5$	$-1/5$	$+1/2$	$4/2$	
$0$	$-1/2$	$2/3$	$1/3$	$3/2$	$0$	$-1/2$	$3/5$	$2/5$	$5/2$	$3/2$
$-1$	$+1/2$	$1/3$	$-2/3$	$-3/2$	$-1$	$+1/2$	$2/5$	$-3/5$	$-3/2$	$-3/2$
$-1$	$-1/2$	$1$			$-1$	$-1/2$	$4/5$	$1/5$	$5/2$	$5/2$
					$-2$	$+1/2$	$1/5$	$-4/5$	$-3/2$	$-3/2$
						$-2$	$-1/2$	$1$		

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

01 Febbraio 2023

• **problema 1 - buca infinita - [10 punti]**

Una particella di massa  $m$  è vincolata a muoversi sul segmento  $0 \leq x \leq L$  (buca infinita di potenziale). Al tempo  $t = 0$ , la sua configurazione è descritta dalla funzione d'onda

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{L}x\right) \right\}.$$

Calcolare il periodo con cui il valor medio della sua posizione oscilla nel tempo, mostrando che, per  $n \gg 1$ , esso coincide con quello 'classico',  $T_{cl} = \frac{2L}{v_{cl}}$ , dove  $v_{cl}$  è definita dalla relazione  $\frac{1}{2}mv_{cl}^2 = \langle H \rangle$ .

• **problema 2 - Momento angolare - [10 punti]**

L'operatore Hamiltoniano di una particella di spin  $1/2$  ha la forma  $\hat{H} = c\hat{J}^2$ , dove  $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ ,  $\hat{L}$  ed  $\hat{S}$  sono gli operatori di momento angolare totale, orbitale e di spin, rispettivamente, mentre  $c$  è una costante.

Al tempo  $t = 0$ , la particella si trova in una configurazione tale che delle misure di  $\hat{L}^2$ ,  $\hat{L}_z$  ed  $\hat{S}_z$  darebbero con certezza i risultati  $2\hbar^2$ ,  $-\hbar$  e  $\hbar/2$ , rispettivamente. Determinare:

1. i possibili risultati di una misura dell'energia e le rispettive probabilità;
2. il valore medio, in funzione del tempo, della componente  $y$  dello spin,  $\langle \hat{S}_y \rangle$ .

• **problema 3 - oscillatori armonici perturbati - [10 punti]**

Due particelle di massa  $m_1$  ed  $m_2$  sono vincolate a muoversi in una dimensione, nello stesso potenziale armonico di frequenza  $\omega$ , con Hamiltoniano imperturbato

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m_2} + \frac{1}{2}m_1\omega^2\hat{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega^2\hat{x}_2^2.$$

Al tempo  $t = 0$ , esse si trovano nello stato fondamentale di  $H_0$ , quando viene accesa la perturbazione

$$\hat{V}(t) = -\frac{2V_0}{x_0^2} \Theta(t) \hat{x}_1 \hat{x}_2 e^{-\gamma t}, \quad \text{dove } \Theta(t) \text{ è la funzione gradino, mentre } x_0^2 = \frac{\hbar}{m\omega}, \quad \text{con } m \equiv \sqrt{m_1 m_2}.$$

Usando la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo, valutare, al primo ordine, la probabilità che il sistema rimanga nello stato fondamentale per tempi lunghi ( $t \gg \gamma^{-1}$ ).

Formule utili:

autofunzioni per una buca infinita di potenziale :  $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$

coefficienti C.-G. :

$1 \times 1/2$	$3/2$			
	$-3/2$	$3/2$	$1/2$	
$+1$	$+1/2$	$1$	$+1/2$	$+1/2$
	$+1$	$1/3$	$2/3$	$3/2$
$+1$	$-1/2$	$2/3$	$-1/3$	$-1/2$
	$0$	$-1/2$	$2/3$	$1/3$
		$0$	$-1/2$	$2/3$
			$1/3$	$-2/3$
				$1$

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

17 Novembre 2022

- **problema 1 - teoria delle perturbazioni per un oscillatore armonico - [10 punti]**

Si consideri un oscillatore armonico di frequenza  $\omega$  e massa  $m$ , perturbato dall'energia potenziale  $\hat{V} = \lambda \hat{x}^3$ . Usare la teoria delle perturbazioni per ottenere la correzione al fino secondo ordine in  $\lambda$  all'energia dello stato fondamentale.

- **problema 2 - Spin 1 - [10 punti]**

Una particella di spin 1 si trova, al tempo  $t = 0$ , nell'autostato dell'operatore di spin  $\hat{S}_x$  con autovalore  $\hbar$ . L'Hamiltoniano del sistema è dato da  $\hat{H} = \omega_0 \hat{S}_z$ , con  $\omega_0$  costante.

1. Si determini lo stato nell'istante  $t^*$  tale che  $\omega_0 t^* = \pi/4$ ;
2. si calcolino i valori medi di  $\hat{S}_x$ ,  $\hat{S}_y$  ed  $\hat{S}_z$  nell'istante  $t^*$ .

- **problema 3 - bosoni o fermioni in una buca di potenziale - [10 punti]**

Due particelle identiche di massa  $m$  e spin 0 si trovano in una buca di potenziale unidimensionale estremamente profonda di larghezza  $L$ .

1. Scrivere la funzione d'onda e l'energia per lo stato fondamentale e per il primo stato eccitato del sistema.
2. Ripetere il calcolo per il caso di due particelle con spin 1/2.

Formule utili:

$$\text{autofunzioni per una buca infinita di potenziale : } \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \text{ con } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$



# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

14 Settembre 2022

- **problema 1 - teoria delle perturbazioni per un oscillatore armonico - [10 punti]**

Una particella si muove in una dimensione, soggetta ad un potenziale armonico, di frequenza  $\omega$ . Essa è sottoposta alla perturbazione

$$\hat{V} = i\nu (\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}).$$

1. Determinare la correzione al primo ordine in  $\nu$  all'energia di tutti i livelli energetici del sistema;
2. determinare la correzione al secondo ordine in  $\nu$  all'energia dello stato fondamentale dell'oscillatore.

- **problema 2 - Spin 1/2 - [10 punti]**

Una particella di spin 1/2 si trova, al tempo  $t = 0$ , nell'autostato dell'operatore di spin  $\hat{S}_x$  con autovalore  $\hbar/2$ . L'Hamiltoniano del sistema è data da  $\hat{H} = 2\omega_0 \hat{S}_z$ , con  $\omega_0$  costante.

1. Si determini lo stato nell'istante  $t^*$  tale che  $\omega_0 t^* = \pi/4$ ;
2. si calcolino i valori medi di  $\hat{S}_x$ ,  $\hat{S}_y$  e  $\hat{S}_z$  nell'istante  $t^*$ .

- **problema 3 - atomo di idrogeno - [10 punti]**

Determinare lo stato  $|\psi\rangle$  dell'elettrone di un atomo di idrogeno sapendo che:

1. una misura della terza componente del momento angolare orbitale fornirebbe con certezza il valore  $L_z = 0$ ;
2. il valor medio dell'energia risulta essere pari alla media aritmetica dei primi due autovalori,  $\frac{E_1 + E_2}{2}$ ;
3. una misura del momento angolare orbitale potrebbe fornire i valori  $L^2 = 0$  e  $L^2 = 2\hbar^2$ , con probabilità  $P(0) = 3/4$  e  $P(2\hbar^2) = 1/4$ , rispettivamente;
4. i coefficienti dello sviluppo di  $|\psi\rangle$ , nella base degli autoket dell'energia e del momento angolare orbitale,  $\{|n, l, m\rangle\}$ , sono tutti reali e positivi.

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

13 Luglio 2022

- **problema 1 - oscillatore armonico bidimensionale - [10 punti]**

Una particella di massa  $m$  si muove nel piano, soggetta ad un potenziale centrale armonico, con Hamiltoniano

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2).$$

Mostrare che la componente  $z$  del momento angolare è una quantità conservata.

- **problema 2 - Composizione dei momenti angolari - [10 punti]**

Si considerino due particelle, la prima di spin 1, inizialmente nello stato  $|s_1 = 1, m_1 = 1\rangle$  e la seconda di spin  $1/2$ , inizialmente nello stato  $|s_2 = 1/2, m_2 = -1/2\rangle$ . Si consideri un'interazione tra le due particelle descritta da

$$H = JS_1 \cdot S_2.$$

Trovare lo stato del sistema ad un generico tempo  $t > 0$ .

Suggerimento: utilizzare la base degli autostati dello spin totale.

- **problema 3 - teoria delle perturbazioni - [10 punti]**

Una particella di massa  $m$  si trova in una buca di potenziale unidimensionale, molto profonda, di larghezza  $L$ . Se la particella viene sottoposta alla perturbazione  $V = \alpha \delta(x - \frac{L}{2})$  (dove  $\alpha$  è una costante), localizzata nel centro della buca di potenziale, calcolare:

1. la correzione al primo ordine agli autovalori dell'energia, spiegando perché le autoenergie con  $n$  pari non sono affette da  $V$
2. i primi due coefficienti (relativi alle componenti proporzionali alle autofunzioni  $\varphi_2(x)$  ed  $\varphi_3(x)$ ) della correzione al primo ordine alla funzione d'onda dello stato fondamentale.

Formule utili.

autovalori ed autofunzioni di  $H$  per la buca infinita di potenziale :

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$$

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

22 Giugno 2022

## • problema 1 - oscillatore armonico bidimensionale e teoria delle perturbazioni - [10 punti]

Una particella di massa  $m$  si muove su un piano, soggetta ad un potenziale centrale armonico, con Hamiltoniano

$$H_0 = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2).$$

La particella si trova in uno stato determinato dalle seguenti condizioni: i) una misura dell'energia fornisce con certezza il risultato  $E = 2\hbar\omega$ ; ii) il valor medio dell'operatore  $A = xy$  è pari a  $\frac{\hbar}{2m\omega}$ ; iii) il valor medio dell'operatore  $B = x^2 - y^2$  è nullo.

1. Determinare lo stato della particella.
2. Si supponga di aggiungere ad  $H_0$  una perturbazione della forma  $V = \lambda B$ . Calcolare le correzioni al primo ordine in  $\lambda$  agli autovalori dell'energia dello stato fondamentale e del primo livello eccitato.

## • problema 2 - Spin 1/2 - [10 punti]

Si considerino due particelle di spin 1/2 la cui interazione è descritta dall'Hamiltoniano

$$H = \frac{2\omega_0}{\hbar^2} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2.$$

All'istante  $t = 0$ , le particelle si trovano nello stato in cui lo spin della particella 1 punta lungo l'asse  $z$ , mentre quello della particella 2 punta nella direzione opposta. Calcolare, in funzione del tempo,

1. la probabilità,  $P_{2\hbar^2}(t)$ , che una misura dello spin totale  $S^2 = |\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2|^2$  dia il valore  $2\hbar^2$ ;
2. il valor medio della componente  $z$  dello spin della prima particella,  $\langle \psi, t | S_{1,z} | \psi, t \rangle$ .

## • problema 3 - armoniche sferiche - [10 punti]

Una particella che si trova in un potenziale sfericamente simmetrico è descritta dalla funzione d'onda

$$\psi(x, y, z) = C(xy + yz + zx) e^{-\alpha(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

1. Qual è la probabilità che una misura del quadrato del momento angolare dia per risultato  $L^2 = 0$ ?
2. Dopo che una misura fornisce  $l = 2$ , quali sono le probabilità relative ai possibili valori di  $m$ ?

Formule utili:

$$\text{alcune armoniche sferiche: } Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi},$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi}, Y_2^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi}.$$

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

12 Aprile 2022

- **problema 1 - oscillatore armonico e teoria delle perturbazioni - [10 punti]**

Si consideri una particella in moto unidimensionale, la cui dinamica è descritta dall'Hamiltoniano

$$H = H_0 + V, \quad \text{con } H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad V = \gamma(xp + px).$$

Trattando  $V$  come una perturbazione, si valutino le correzioni fino al secondo ordine in  $\gamma$  per tutti gli autovalori di  $H_0$ .

- **problema 2 - Spin 1/2 - [10 punti]**

Si consideri una particella di spin 1/2. Su di essa, viene effettuata una prima misura della componente

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{S}$  dello spin, nella direzione  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ . Tale misura fornisce il risultato  $+\hbar/2$ . Si determinino i

valori medi delle tre componenti  $S_x, S_y, S_z$  dopo la misura. Si valuti, inoltre, la probabilità che una seconda misura, nella direzione  $z$ , fornisca il risultato  $-\hbar/2$ .

- **problema 3 - fermioni in una buca di potenziale - [10 punti]**

Due particelle identiche, di massa  $m$ , si trovano in una buca di potenziale unidimensionale estremamente profonda, di larghezza  $L$ . Scrivere tutti i ket di stato relativi ai primi due livelli energetici del sistema ed i corrispondenti autovalori, nei seguenti casi:

1. le particelle sono bosoni di spin 0;
2. le particelle sono fermioni di spin 1/2;
3. le particelle sono bosoni di spin 1.

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

02 Febbraio 2022

- **problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]**

Si consideri una particella di massa  $m$  in un potenziale armonico unidimensionale di pulsazione  $\omega$ . Sia  $\hat{V} = \lambda(\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2)$  una perturbazione (con  $\hat{a}$  ed  $\hat{a}^{\dagger}$  operatori di distruzione e creazione, rispettivamente, e  $\lambda$  costante reale). Valutare le correzioni allo stato fondamentale ed alla sua energia, rispettivamente al primo ed al secondo ordine in  $\lambda$ .

- **problema 2 - Momento angolare - [10 punti]**

Una particella si trova nella configurazione descritta dalla seguente funzione d'onda (espressa in coordinate sferiche)

$$\psi(r, \theta, \varphi) = N \{ \cos \theta + \sin \theta (1 + 2 \cos \theta) \sin \varphi \} g(r), \quad \text{con} \quad \int_0^{\infty} r^2 |g(r)|^2 dr = 1.$$

1. Quali sono i possibili risultati di una misura di  $\hat{L}_z$  e di  $\hat{L}^2$  ?
2. Quali sono le probabilità di ottenere tali risultati ?
3. Quanto vale il valor medio di  $\hat{L}^2$  ?

- **problema 3 - buca di potenziale perturbata - [10 punti]**

Un elettrone è confinato a muoversi lungo l'asse  $x$ , in una buca di potenziale unidimensionale estremamente profonda, di larghezza  $L$ . Dall'istante  $t = 0$  in poi, il sistema viene sottoposto alla perturbazione  $V(x, t) = 2\hbar\gamma \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) e^{-\alpha t}$ . Calcolare, al primo ordine perturbativo, la probabilità di trovare l'elettrone nel primo stato eccitato per  $t \gg \alpha^{-1}$ .

Formule utili:

autofunzioni per una buca infinita di potenziale:  $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$

alcune armoniche sferiche:  $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ ,  $Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$ ,  $Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}$ ,

$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$ ,  $Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi}$ ,  $Y_2^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi}$ .

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

16 Novembre 2021

- **problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]**

Una particella di massa  $m$  è confinata a muoversi in una dimensione, soggetta ad un potenziale armonico di frequenza  $\omega$ . Essa si trova, al tempo  $t = 0$  in uno stato in cui una misura di energia può fornire con uguale probabilità i valori  $\frac{3}{2} \hbar\omega$  e  $\frac{5}{2} \hbar\omega$ .

1. Scrivere il ket di stato  $|\psi, t\rangle$  del sistema, sapendo che il valor medio della posizione, al tempo  $t = 0$ , vale  $\langle \psi, 0 | \hat{x} | \psi, 0 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ .
2. Determinare l'istante di tempo  $t > 0$  tale che  $\langle \psi, t | \hat{x} | \psi, t \rangle = 0$ .

- **problema 2 - Spin - [10 punti]**

Due particelle distinguibili di spin  $1/2$  siano descritte dall'Hamiltoniana

$$H = \gamma(S_x^2 + S_y^2),$$

dove  $S_\alpha = S_\alpha^{(1)} + S_\alpha^{(2)}$ ,  $\alpha = x, y, z$ , le componenti dello spin totale  $\mathbf{S} = \mathbf{S}^1 + \mathbf{S}^2$ .

1. Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.
2. Se al tempo  $t = 0$  le due particelle si trovano nello stato  $|+\rangle_1 |-\rangle_2$  autoket di  $S_z^{(1)}$  con autovalore  $\hbar/2$  e di  $S_z^{(2)}$  con autovalore  $-\hbar/2$ , trovare lo stato al tempo  $t$ .

- **problema 3 - perturbazioni indipendenti dal tempo - [10 punti]**

Una particella di massa  $m$  si trova in una buca di potenziale unidimensionale, estremamente profonda, estesa tra  $x = 0$  ed  $x = a$ . All'interno della buca, essa è anche soggetta alla perturbazione  $\hat{V}$ , della forma  $\hat{V} = V_0 \cos\left(\frac{\pi\hat{x}}{a}\right)$ . Calcolare la variazione dell'energia degli autostati imperturbati dell'energia, al primo ordine perturbativo.

Formule utili:

operatore di distruzione per un oscillatore armonico:  $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}}{x_0} + i \frac{\hat{p}}{p_0} \right)$  con  $x_0 = \frac{\hbar}{p_0} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

autostati ed autovalori dell'energia per una buca infinita:  $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ ,  $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}$ .

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

15 Settembre 2021

- **problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]**

Una particella di massa  $m$ , vincolata a muoversi lungo una retta, è soggetta a potenziale armonico di pulsazione  $\omega$ .

1. Usando la rappresentazione di Heisenberg, scrivere le espressioni al generico tempo  $t$  per gli operatori posizione,  $\hat{x}(t)$ , e momento lineare,  $\hat{p}(t)$ .
2. Calcolare poi  $\frac{d}{dt} \langle 0 | \hat{x}(t) \hat{x}(0) | 0 \rangle$ .

- **problema 2 - Momento angolare - [10 punti]**

La dinamica di due particelle distinguibili di spin  $1/2$  è descritta da

$$\hat{H} = \frac{A}{\hbar^2} \left( \hat{S}_{1,x} \hat{S}_{2,x} + \hat{S}_{1,y} \hat{S}_{2,y} - \frac{1}{2} \hat{S}_{1,z}^2 - \frac{1}{2} \hat{S}_{2,z}^2 \right),$$

dove  $\hat{\mathbf{S}}_1$  ed  $\hat{\mathbf{S}}_2$  sono gli operatori (vettoriali) di spin per le due particelle, mentre  $A$  è una costante con le dimensioni di un'energia. All'istante  $t = 0$  vengono misurate le componenti lungo l'asse  $z$  dello spin delle due particelle e le misure danno  $+\frac{\hbar}{2}$  per la particella 1 e  $-\frac{\hbar}{2}$  per la particella 2. Determinare lo stato del sistema al generico tempo  $t > 0$ .

- **problema 3 - teoria delle perturbazioni - [10 punti]**

Una particella di massa  $m$  si trova in una buca di potenziale unidimensionale, estremamente profonda, estesa tra  $x = 0$  ed  $x = L$ . Essa viene perturbata dall'energia potenziale  $V = \alpha \hat{p}^2$ , con  $\alpha$  costante piccola (rispetto a cosa?). Calcolare la variazione dell'energia del livello fondamentale dell'Hamiltoniana imperturbata al primo ordine perturbativo. Verificare il risultato con il calcolo esatto.

Formule utili:

per una buca infinita di potenziale :  $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x)$ ,  $E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}$ , con  $k_n = n \frac{\pi}{L}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

per l'oscillatore armonico :  $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}}{x_0} + i \frac{\hat{p}}{p_0} \right)$  con  $x_0 = \frac{\hbar}{m\omega}$  e  $p_0 = \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}}$

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

07 Luglio 2021

- **problema 1 - buca unidimensionale infinita - [10 punti]**

Una particella di massa  $m$  si trova in una buca di potenziale unidimensionale, estremamente profonda, estesa tra  $x = 0$  ed  $x = L$ . All'istante  $t = 0$  il suo stato è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \varphi_1(x) + e^{i\theta} \varphi_2(x) \},$$

dove  $\varphi_n(x)$  denota l' $n$ -esima autofunzione normalizzata dell'Hamiltoniano, mentre  $\theta$  è una costante reale. Si calcoli il valor medio dell'operatore impulso in funzione del tempo.

- **problema 2 - Spin 1/2 - [10 punti]**

Una particella di spin 1/2 si trova in una configurazione fisica per la quale il valor medio delle tre componenti dello spin vale:

$$\langle \hat{S}_x \rangle = \hbar \alpha \beta, \quad \langle \hat{S}_y \rangle = 0, \quad \langle \hat{S}_z \rangle = \frac{\hbar}{2} (\alpha^2 - \beta^2), \quad \text{con } \alpha \in [0, 1], \beta = \sqrt{1 - \alpha^2}.$$

1. Scrivere l'espressione del ket di stato che descrive tale configurazione in funzione di  $\alpha$  e  $\beta$ ;
2. Se l'Hamiltoniano del sistema è  $\hat{H} = -\frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_y$  (dove  $\hat{\sigma}_y$  è la seconda matrice di Pauli), ricavare:
  - (a) il ket di stato al generico tempo  $t > 0$ ;
  - (b) il valor medio di  $\hat{S}_z$  in funzione del tempo.

- **problema 3 - teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo - [10 punti]**

Si consideri un oscillatore armonico di pulsazione  $\omega$ , perturbato da un potenziale della forma  $\hat{V} = \gamma \hat{x}^3 + \eta \hat{x}^4$ . Calcolare la correzione all'energia dello stato fondamentale, dovuta alla presenza di  $\hat{V}$ , al primo ordine nelle costanti  $\gamma$  e  $\eta$ .

Formule utili:

per una buca infinita di potenziale :  $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x)$ ,  $E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}$ , con  $k_n = n \frac{\pi}{L}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

per l'oscillatore armonico :  $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}}{x_0} + i \frac{\hat{p}}{p_0} \right)$  con  $x_0 = \frac{\hbar}{m\omega}$ ,  $p_0 = \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}}$



# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

16 Giugno 2021

- **problema 1 - buca unidimensionale infinita - [10 punti]**

Una particella di massa  $m$  si trova in una buca di potenziale unidimensionale, estremamente profonda, estesa tra  $x = 0$  ed  $x = L$ . Per ciascuno degli stati stazionari  $\varphi_n$  del sistema, determinare

1. il valor medio dell'operatore impulso;
2. la probabilità  $P(n)$  di trovare la particella nell'intervallo  $[0, L/10]$ .

Calcolare, infine, il limite di  $P(n)$  per  $n \rightarrow \infty$  e commentare il risultato.

- **problema 2 - Atomo di idrogeno e momento angolare - [10 punti]**

Un atomo di idrogeno si trovi nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\vec{r}) = Nr e^{-r/(2a_b)} \cos \theta.$$

Si sappia inoltre che lo stato di spin dell'elettrone sia  $|+\rangle$ . Determinare

1. la costante di normalizzazione  $N$ ;
2. i possibili risultati della misura di  $\vec{L}^2$ ,  $L_z$ ,  $\vec{J}^2$ ,  $J_z$ , con le relative probabilità.

- **problema 3 - teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo - [10 punti]**

Un oscillatore armonico di pulsazione  $\omega$ , inizialmente nello stato fondamentale, viene sottoposto, a  $t = 0$ , ad una perturbazione che ha come effetto quello di portare istantaneamente la pulsazione al valore  $\omega \sqrt{1 + \epsilon}$ , con  $\epsilon \ll 1$ . Calcolare

1. la probabilità che, ad un generico istante di tempo  $t$ , l'oscillatore si trovi nello stato eccitato  $n$ -esimo;
2. la probabilità che, ad un generico istante di tempo  $t$ , l'oscillatore si trovi ancora nello stato fondamentale.

Formule utili:

per una buca infinita di potenziale:  $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x)$ ,  $E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}$ , con  $k_n = n \frac{\pi}{L}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

per l'oscillatore armonico:  $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}}{x_0} + i \frac{\hat{p}}{p_0} \right)$  con  $x_0 = \frac{\hbar}{m\omega}$ ,  $p_0 = \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}}$

alcune armoniche sferiche:  $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ ,  $Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$ ,  $Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}$ .

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

20 Maggio 2021

- **problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]**

Una particella di massa  $m$  si trova in un potenziale armonico unidimensionale di pulsazione  $\omega$ , inizialmente nello stato fondamentale.

1. Usando la rappresentazione di Heisenberg scrivere un'espressione per l'operatore posizione al generico tempo  $t$ ,  $\hat{x}(t)$ ;
2. calcolare il valor medio  $C(t) = \langle 0 | \hat{x}(t) \hat{x}(0) | 0 \rangle$ .

- **problema 2 - Momento angolare - [10 punti]**

La dinamica di due spin  $1/2$ , indicati con  $a$  e  $b$ , che inizialmente si trovano nello stato  $|\psi, t=0\rangle = |+_a, -_b\rangle$ , è generata dall'Hamiltoniano

$$H = \omega_0(S_z^{(a)} + S_z^{(b)}) + \frac{2\lambda}{\hbar}(S_x^{(a)}S_x^{(b)} + S_y^{(a)}S_y^{(b)}).$$

1. Rappresentare  $H$  come una matrice  $4 \times 4$  nella base fattorizzata degli autostati di  $S_z^{(a)}$  e  $S_z^{(b)}$ ;
2. trovarne autovalori ed autovettori;
3. calcolare la probabilità che al generico tempo  $t$ , il sistema si trovi ancora nello stato iniziale:  $P(t) = |\langle \psi, 0 | \psi, t \rangle|^2$ .

- **problema 3 - teoria delle perturbazioni - [10 punti]**

Una particella di massa  $m$  si trova in una buca di potenziale unidimensionale, estremamente profonda, estesa tra  $x=0$  ed  $x=L$ . Essa viene perturbata dall'energia potenziale  $V = -LV_0 \delta(x - \frac{L}{4})$ . Calcolare la variazione dell'energia degli autostati dell'Hamiltoniana imperturbata, al primo ordine perturbativo.

Formule utili:

per una buca infinita di potenziale :  $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x)$ ,  $E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}$ , con  $k_n = n \frac{\pi}{L}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

per l'oscillatore armonico :  $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}}{x_0} + i \frac{\hat{p}}{p_0} \right)$  con  $x_0 = \frac{\hbar}{m\omega}$  e  $p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}$

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

25 Marzo 2021

- **problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]**

Una particella di massa  $m$  si trova in un potenziale armonico unidimensionale di pulsazione  $\omega$ . Il suo stato iniziale è tale che una misura di energia può fornire con probabilità  $P_0 = \frac{3}{4}$  e  $P_1 = \frac{1}{4}$  i valori  $E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega$  ed  $E_1 = \frac{3}{2} \hbar\omega$ .

1. Scrivere il ket di stato  $|\psi, 0\rangle$  del sistema, sapendo che il valor medio della posizione vale  $\langle\psi, 0|\hat{x}|\psi, 0\rangle = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$ ;
2. Determinare il più piccolo istante di tempo  $t > 0$  tale che il valor medio della posizione,  $\langle\psi, t|\hat{x}|\psi, t\rangle$ , ritorni allo stesso valore iniziale.

- **problema 2 - Momento angolare - [10 punti]**

La dinamica di una particella di spin 1 è descritta da

$$\hat{H} = \frac{A}{\hbar^2} \hat{S}_z^2 - \frac{B}{\hbar\sqrt{2}} \hat{S}_x$$

dove  $\hat{S}_j$ , con  $j = x, y, z$ , sono le componenti dello spin; mentre  $A$  e  $B$  sono costanti positive. All'istante  $t = 0$ , la particella si trova nell'autostato di  $\hat{S}_z$  con autovalore  $+\hbar$ . Determinare il valor medio di  $\hat{S}_z$  al generico tempo  $t > 0$ .

- **problema 3 - teoria delle perturbazioni - [10 punti]**

Una particella di massa  $m$  si trova in una buca di potenziale unidimensionale, estremamente profonda, estesa tra  $x = 0$  ed  $x = L$ . Essa viene perturbata, a metà della buca, dall'energia potenziale  $V = -LV_0 \delta(x - \frac{L}{2})$ . Calcolare la variazione dell'energia degli autostati dell'Hamiltoniana imperturbata, al primo ordine perturbativo.

Formule utili:

per una buca infinita di potenziale :  $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x)$ ,  $E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}$ , con  $k_n = n \frac{\pi}{L}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

per l'oscillatore armonico :  $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}}{x_0} + i \frac{\hat{p}}{p_0} \right)$  con  $x_0 = \frac{\hbar}{m\omega}$  e  $p_0 = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}$

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

24 Febbraio 2021

- **problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]**

Una particella di massa  $m$  si trova in un potenziale armonico unidimensionale di pulsazione  $\omega$ . Al tempo  $t = 0$ , lo stato della particella è dato da

$$|\psi, 0\rangle = A(|3\rangle - i|4\rangle).$$

Dopo aver normalizzato lo stato, calcolare i valori medi della posizione e della quantità di moto in funzione del tempo,  $\langle\psi, t|\hat{x}|\psi, t\rangle$  e  $\langle\psi, t|\hat{p}|\psi, t\rangle$ .

- **problema 2 - Momento angolare - [10 punti]**

La dinamica di due particelle di spin  $1/2$  è descritta da  $\hat{H} = -A\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 + B(\hat{S}_{1,z} - \hat{S}_{2,z})$ , dove  $\hat{\mathbf{S}}_1$  ed  $\hat{\mathbf{S}}_2$  sono gli operatori (vettoriali) di spin per le due particelle, di cui  $\hat{S}_{1,z}$  ed  $\hat{S}_{2,z}$  costituiscono le terze componenti. Infine,  $A$  e  $B$  sono costanti positive. All'istante  $t = 0$ , vengono misurate le componenti lungo l'asse  $x$  dello spin delle due particelle ed entrambe le misure danno il risultato  $+\frac{\hbar}{2}$ . Determinare i valori medi di  $\hat{S}_{1,z}$  ed  $\hat{S}_{2,z}$  al generico tempo  $t > 0$ .

- **problema 3 - due particelle in una buca di potenziale - [10 punti]**

Due particelle identiche di massa  $m$  e spin  $0$  si trovano in una buca di potenziale unidimensionale di larghezza  $L$ . La debole interazione tra esse può essere descritta dall'energia potenziale  $\hat{V} = -V_0 L \delta(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)$ .

1. Ignorando l'interazione, scrivere la funzione d'onda e l'energia per lo stato fondamentale e per il primo stato eccitato del sistema.
2. Utilizzando la teoria delle perturbazioni, ottenere la correzione al primo ordine in  $V_0$  alle energie calcolate in precedenza.

Formule utili:

autofunzioni per una buca infinita di potenziale :  $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

27 Gennaio 2021

- **problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]**

Una particella di massa  $m$  si trova in un potenziale armonico unidimensionale di pulsazione  $\omega$ . Al tempo  $t = 0$ , lo stato della particella è una sovrapposizione degli autostati dell'energia, data da

$$|\psi, 0\rangle = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n} |n\rangle .$$

1. trovare la costante  $A$ ;
2. scrivere un'espressione per lo stato evoluto al tempo  $t$ ,  $|\psi, t\rangle$ ;
3. mostrare che la densità di probabilità di posizione  $\rho(x, t) = |\langle x | \psi, t \rangle|^2$  è una funzione periodica del tempo e trovarne il periodo;
4. trovare il valor medio dell'energia.

Suggerimento: usare le serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ ;  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} = 1$ .

- **problema 2 - Momento angolare - [10 punti]**

La dinamica di un rotatore tridimensionale con momento di inerzia  $I$  è descritta da  $\hat{H} = \frac{\hat{L}^2}{2I} + \omega \hat{L}_z$ , dove  $\hat{L}^2$  ed  $\hat{L}_z$  sono il modulo quadro e la terza componente del momento angolare, rispettivamente; mentre  $\omega$  è una costante con le dimensioni di frequenza. All'istante  $t = 0$  il sistema si trova in un autostato comune di  $\hat{L}^2$  (con autovalore  $2\hbar^2$ ) e di  $(L_x + L_z)/\sqrt{2}$  (con autovalore  $\hbar$ ).

1. Determinare lo stato del sistema al generico tempo  $t > 0$ ;
2. Determinare il valor medio di  $L_x$  in funzione del tempo.

- **problema 3 - due fermioni polarizzati in spin - [10 punti]**

Due particelle identiche di massa  $m$  e spin  $1/2$  si trovano in una buca di potenziale unidimensionale di larghezza  $L$ . Se, a causa di un campo magnetico molto intenso, lo spin di entrambe le particelle è fissato nello stato  $|+\rangle$  (autostato di  $\hat{S}_z$  con autovalore  $\hbar/2$ ), scrivere l'energia minima del sistema e la corrispondente funzione d'onda. Se è presente un'energia potenziale di interazione della forma  $\hat{V} = k\delta(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)$ , calcolare la correzione al primo ordine all'energia dello stato descritto in precedenza. Dare un'interpretazione intuitiva del risultato ottenuto.

Formule utili:

autofunzioni per una buca infinita di potenziale :  $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

17 Novembre 2020

- **problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]**

Tra tutti gli stati di un oscillatore armonico unidimensionale di pulsazione  $\omega$  si determini quello in cui:

1. la misura dell'energia può dare il valore  $\hbar\omega/2$  con probabilità  $\frac{1}{2}$  e il valore  $3\hbar\omega/2$  con probabilità  $\frac{1}{2}$
2. compatibilmente con la richiesta di cui al punto precedente, il valor medio della posizione assume il valore massimo possibile.

Considerando lo stato appena trovato come quello iniziale del sistema, se ne scriva l'evoluto temporale fino ad un generico tempo  $t$  e si calcoli su di esso il valor medio dell'operatore posizione,  $\langle \hat{x}(t) \rangle$ .

- **problema 2 - Spin 1 - [10 punti]**

Si consideri una particella di spin  $S = 1$ . La sua dinamica sia descritta dall'Hamiltoniano  $\hat{H} = \frac{\omega_0}{\hbar} (\hat{S}_x^2 - \hat{S}_y^2)$ .

Se al tempo  $t = 0$ , una misura di  $\hat{S}_z$  fornisce il valore  $+\hbar$ , calcolare il valor medio delle tre componenti dello spin al generico tempo  $t$ .

- **problema 3 - perturbazioni indipendenti dal tempo - [10 punti]**

Si consideri un atomo di idrogeno perturbato dal potenziale:

$$V = \lambda \frac{e^{-\beta r}}{r}.$$

Si calcoli la variazione dell'energia dello stato fondamentale al primo ordine e si discutano i limiti di validità dell'approssimazione se, come ordine di grandezza,  $\beta$  è dell'ordine del reciproco del raggio di Bohr,  $\beta \sim a_b^{-1}$ .

Formule utili:

operatore di distruzione per un oscillatore armonico:  $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}}{x_0} + i \frac{\hat{p}}{p_0} \right)$  con  $x_0 = \frac{\hbar}{m\omega} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

stato fondamentale dell'atomo di idrogeno:  $\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_b^3}} e^{-\frac{r}{a_b}}$ ,

integrale utile:  $\int_0^\infty r e^{-\alpha r} dr = \frac{1}{\alpha^2}$ .

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

17 Settembre 2020

## • problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]

Una particella di massa  $m$  è confinata a muoversi lungo l'asse  $x$  e soggetta ad un potenziale armonico di frequenza  $\omega$ . Essa si trova in uno stato in cui la misura di energia può fornire con uguale probabilità i valori  $E_1 = \frac{3}{2} \hbar\omega$  ed  $E_2 = \frac{5}{2} \hbar\omega$ .

1. Scrivere il ket di stato  $|\psi, t\rangle$  del sistema sapendo che, al tempo  $t = 0$ , il valor medio della quantità di moto vale  $\langle \psi, 0 | \hat{p} | \psi, 0 \rangle = \sqrt{\hbar m \omega}$ .
2. Determinare l'istante di tempo  $t > 0$  tale che  $\langle \psi, t | \hat{p} | \psi, t \rangle = 0$ .

## • problema 2 - Momento angolare - [10 punti]

Una particella che si trova in un potenziale centrale è nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x, y, z) = A(xy + yz + zx)$$

1. Qual è la probabilità che una misura del quadrato del momento angolare orbitale dia risultato nullo?
2. Qual è la probabilità che si ottenga il valore  $|\mathbf{L}|^2 = 6\hbar^2$ ?
3. Quali sono le probabilità relative ai possibili valori di  $L_z$ ?

## • problema 3 - perturbazioni dipendenti dal tempo - [10 punti]

Una particella di massa  $m$  è confinata in una buca di potenziale unidimensionale estremamente profonda, con pareti in  $x = 0$  ed  $x = L$ . Al tempo  $t = 0$ , essa si trova nello stato fondamentale dell'Hamiltoniano,  $\psi_1(x)$ . Per tempi  $t > 0$ , viene accesa una perturbazione dipendente dal tempo, localizzata nel centro della buca, della forma  $V(t) = V_0 L e^{-\gamma t} \delta(x - \frac{L}{2})$ . Usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine, calcolare le probabilità,  $P_2(t)$  e  $P_3(t)$ , che, al tempo  $t \gg \gamma^{-1}$ , la particella si trovi nel primo e nel secondo stato eccitato.

Formule utili:

operatore di distruzione per un oscillatore armonico:  $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}}{x_0} + i \frac{\hat{p}}{p_0} \right)$ , con  $x_0 = \frac{\hbar}{m\omega} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ ;

armoniche sferiche:  $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ ,  $Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$ ,  $Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}$ ,

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), Y_2^{\pm 2} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi}, Y_2^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi};$$

autofunzioni di  $\hat{H}$  per una buca infinita:  $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$ .

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

17 Giugno 2020

- **problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]**

Considerare una particella di massa  $m$  confinata a muoversi lungo l'asse  $x$  e soggetta ad un potenziale armonico di frequenza  $\omega$ . Se lo stato iniziale del sistema è dato da  $|\psi, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (2\hat{a}^\dagger + \mathbf{1}) |0\rangle$ , dove  $|0\rangle$  è lo stato fondamentale e  $\hat{a}^\dagger$  è l'operatore di creazione, ottenere il valor medio dell'operatore posizione ad un generico tempo  $t > 0$ .

- **problema 2 - Momento angolare - [10 punti]**

La configurazione fisica di una particella è descritta dallo stato  $|\psi\rangle$ , autostato del modulo quadro del momento angolare,  $|\hat{\mathbf{L}}|^2$ , con autovalore  $2\hbar^2$ . Lo stato  $|\psi\rangle$  è anche autostato dell'operatore  $\hat{L}_x$ , componente del momento angolare lungo l'asse  $x$ , con autovalore massimo. Esprimere lo stato nella base degli autostati di  $|\hat{\mathbf{L}}|^2$  ed  $\hat{L}_z$ .

- **problema 3 - perturbazioni indipendenti dal tempo - [10 punti]**

Si consideri un atomo di idrogeno perturbato dal potenziale:

$$H_i = \lambda \frac{e^{-\beta r}}{r^2}$$

Si calcoli la variazione dell'energia dello stato fondamentale al primo ordine e si discuta della validità della approssimazione.

Formule utili:

operatore di distruzione per un oscillatore armonico:  $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}}{x_0} + i \frac{\hat{p}}{p_0} \right)$  con  $x_0 = \frac{\hbar}{p_0} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

stato fondamentale dell'atomo di idrogeno:  $\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_b^3}} e^{-r/a_b}$ .



# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

19 Febbraio 2020

- **problema 1 - oscillatore armonico perturbato - [10 punti]**

Un elettrone (di massa  $m$  e carica  $q = -e$ ) è confinato a muoversi lungo l'asse  $x$  e soggetto ad un potenziale armonico di frequenza  $\omega$ . Il sistema è perturbato dalla presenza del campo elettrico  $\mathbf{E} = E_0 \hat{u}_x$ , parallelo alla direzione del moto. Considerando tale campo elettrico una piccola perturbazione, ottenere l'espressione per lo stato fondamentale del sistema al primo ordine perturbativo. Usare tale espressione per calcolare il valor medio della posizione dell'elettrone.

Sotto quale condizione si può considerare  $E_0$  una perturbazione piccola?

- **problema 1 - oscillatore armonico perturbato - [bonus]**

Risolvere in maniera esatta il problema precedente.

- **problema 2 - Spin 1 - [10 punti]**

Si consideri una particella di spin  $S = 1$ . La sua dinamica sia descritta dall'Hamiltoniano  $\hat{H} = a\hat{S}_z + \frac{b}{\hbar}\hat{S}_x^2$ , dove  $a$  e  $b$  sono costanti con le dimensioni di frequenza. Se al tempo  $t = 0$ , una misura di  $\hat{S}_z$  fornisce il valore  $+\hbar$ , calcolare il valor medio delle tre componenti dello spin al generico tempo  $t$ .

- **problema 3 - Atomo di Idrogeno - [10 punti]**

Al tempo  $t = 0$ , lo stato dell'elettrone nell'atomo di idrogeno sia dato, nella base degli autostati dell'Hamiltoniano  $\{|n, l, m\rangle\}$ , da

$$|\psi, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} \left( 2|1, 0, 0\rangle + |2, 1, 0\rangle + \sqrt{2}|2, 1, 1\rangle + \sqrt{3}|2, 1, -1\rangle \right).$$

1. Qual è il valor medio dell'energia ?
2. Al tempo  $t = 0$ , viene eseguita una misura (supposta praticamente istantanea) dell'operatore  $\hat{L}_z$ , terza componente del momento angolare orbitale. La misura fornisce un valore nullo. Qual è la probabilità di ottenere tale valore ?
3. Scrivere lo stato del sistema ad un generico tempo  $t$  successivo alla misura.

Formule utili:

$$\text{operatore di distruzione per un oscillatore armonico: } \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}}{x_0} + i \frac{\hat{p}}{p_0} \right) \quad \text{con } x_0 = \frac{\hbar}{m\omega} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

29 Gennaio 2020

- **problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]**

Considerare una particella di massa  $m$  confinata a muoversi lungo l'asse  $x$  e soggetta ad un potenziale armonico di frequenza  $\omega$ . Ottenere un'espressione per gli operatori  $\hat{x}(t)$  e  $\hat{p}(t)$  in rappresentazione di Heisenberg. Se lo stato iniziale del sistema è dato da  $|\psi, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$ , dove  $|n\rangle$  è autostato dell'Hamiltoniano  $\forall n \in \mathbb{N}$ , ottenere i valori medi di  $\hat{x}(t)$  e  $\hat{p}(t)$  su tale stato.

- **problema 2 - Spin 1 - [10 punti]**

Si consideri una particella di spin  $S = 1$ . La sua dinamica sia descritta dall'Hamiltoniano  $\hat{H} = \frac{\omega_0}{\hbar}(\hat{S}_x^2 - \hat{S}_y^2)$ . Se al tempo  $t = 0$ , una misura di  $\hat{S}_x$  fornisce il valore  $+\hbar$ , calcolare il valor medio delle tre componenti dello spin al generico tempo  $t$ .

- **problema 3 - perturbazioni dipendenti dal tempo - [10 punti]**

Una particella di massa  $m$  è confinata in una buca di potenziale unidimensionale estremamente profonda, con pareti in  $x = 0$  ed  $x = L$ . Al tempo  $t = 0$ , essa si trova nello stato fondamentale dell'Hamiltoniano,  $\psi_1(x)$ . Per tempi  $t > 0$ , viene accesa una perturbazione dipendente dal tempo, localizzata nel centro della buca, della forma  $V(t) = V_0 L e^{-\gamma t} \delta(x - \frac{L}{2})$ . Usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine, calcolare le probabilità,  $P_2(t)$  e  $P_3(t)$ , che, al tempo  $t \gg \gamma^{-1}$ , la particella si trovi nel primo e nel secondo stato eccitato.

Formule utili:

operatore di distruzione per un oscillatore armonico:  $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}}{x_0} + i \frac{\hat{p}}{p_0} \right)$  con  $x_0 = \frac{\hbar}{m\omega} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

autofunzioni di  $\hat{H}$  per una buca infinita:  $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$ .

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica

19 Novembre 2019

## problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]

Si consideri una particella di massa  $m$  vincolata a muoversi in una dimensione spaziale e soggetta ad un potenziale armonico di frequenza  $\omega$ . Al tempo  $t = 0$ , essa si trova nello stato coerente  $|\alpha\rangle$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ricordando che  $|\alpha\rangle$  è autostato dell'operatore di distruzione, tale che  $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ , trovare il valor medio della posizione e della quantità di moto della particella al tempo  $t$ .

## problema 2 - spin 1/2 - [10 punti]

L'interazione tra due particelle distinguibili di spin 1/2 è descritta tramite l'Hamiltoniana

$$H = -a(S_1^x S_2^x + S_1^y S_2^y),$$

essendo  $S_i^x, S_i^y, S_i^z$  le componenti  $x, y, z$  dello spin della  $i$ -esima particella e  $a$  una costante.

1. Trovare autovettori e autovalori dell'Hamiltoniana.
2. Se al tempo  $t = 0$  il sistema si trova nello stato  $|{-}_1, +_2\rangle$ , autoket simultaneo di  $S_1^z, S_2^z$  con autovalori  $-\hbar/2, \hbar/2$ , rispettivamente, trovare lo stato del sistema al tempo  $t$ .

## problema 3 - teoria delle perturbazioni - [10 punti]

Una particella di massa  $m$  si trova in una buca di potenziale unidimensionale, estremamente profonda, estesa tra  $x = 0$  ed  $x = L$ . Essa viene perturbata localmente, a metà della buca, tramite l'energia potenziale  $V = -V_0 \delta(x - \frac{L}{2})$ . Calcolare la variazione dell'energia degli autostati dell'Hamiltoniana imperturbata, al primo ordine perturbativo.

Si ricorda che, per la buca infinita, autostati ed autovalori dell'energia sono dati da

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x), \quad \varepsilon_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}, \quad \text{con } k_n = n \frac{\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

13 Settembre 2019

- **problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]**

Si consideri una particella di massa  $m$  vincolata a muoversi in una dimensione spaziale e soggetta a un potenziale armonico di frequenza  $\omega$ . A un certo istante di tempo, essa si trova nello stato

$$|\alpha\rangle = e^{-i\hat{p}x_1/\hbar} |0\rangle .$$

1. Calcolare i valori medi di posizione e impulso sullo stato  $|\alpha\rangle$ .
2. Verificare che  $|\alpha\rangle$  è uno stato coerente, cioè un autostato dell'operatore di distruzione  $\hat{a}$ , e trovarne l'autovalore corrispondente.

*Suggerimento:* utilizzare (i) l'espressione di  $\hat{a}$  in termini di  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$ ; (ii)  $[\hat{x}, f(\hat{p})] = i\hbar \frac{df(\hat{p})}{d\hat{p}}$ .

- **problema 2 - spin 1 - [10 punti]**

Una particella di spin 1 si trova, al tempo  $t = 0$ , nell'autostato dell'operatore di spin  $\hat{S}_z$  con autovalore 0. L'Hamiltoniano del sistema è  $\hat{H} = \omega_0 \hat{S}_x$ , con  $\omega_0$  costante.

1. Si determini lo stato al tempo  $t > 0$ ;
2. si calcolino i valori medi di  $\hat{S}_x$ ,  $\hat{S}_y$  e  $\hat{S}_z$  al tempo  $t > 0$ .

- **problema 3 - teoria delle perturbazioni - [10 punti]**

Una particella di massa  $m$  vincolata a un moto unidimensionale tra gli estremi  $x = 0$  ed  $x = a$  è soggetta a una perturbazione della forma  $V = \epsilon p^2/(2m)$ , con  $\epsilon \ll 1$ . Calcolare al prim'ordine perturbativo lo spostamento dei livelli energetici del sistema e confrontare il risultato con il calcolo esatto.

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

8 Luglio 2019

- **problema 1 - oscillatore armonico - [10 punti]**

Si consideri una particella di massa  $m$  vincolata a muoversi in una dimensione spaziale e soggetta ad un potenziale armonico di frequenza  $\omega$ . Al tempo  $t = 0$ , essa si trova nello stato coerente  $|\alpha\rangle$ , con  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \in \mathbb{C}$ . Ricordando che  $|\alpha\rangle$  è autostato dell'operatore di distruzione, tale che  $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$  e che, nella base degli autostati dell'energia, si ha  $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$ , trovare:

1. lo stato del sistema al tempo  $t$ ,  $|\psi, t\rangle$ ;
2. i valori medi dell'energia e della posizione sullo stato  $|\psi, t\rangle$ .

- **problema 2 - spin 1/2 - [10 punti]**

Una particella di spin 1/2 si trova, al tempo  $t = 0$ , nell'autostato dell'operatore di spin  $\hat{S}_x$  con autovalore  $\hbar/2$ . L'Hamiltoniano del sistema è  $\hat{H} = 2\omega_0\hat{S}_z$ , con  $\omega_0$  costante.

1. Si determini lo stato al tempo  $t > 0$ ;
2. si calcolino i valori medi di  $\hat{S}_x$ ,  $\hat{S}_y$  e  $\hat{S}_z$  al tempo  $t > 0$ .

- **problema 3 - teoria delle perturbazioni - [10 punti]**

Una particella di massa  $m$  si trova in una buca di potenziale unidimensionale, estremamente profonda, estesa tra  $x = 0$  ed  $x = a$ . Nella buca di potenziale viene inserita un'impurezza fortemente localizzata, la cui azione sulla particella è descrivibile tramite l'energia potenziale  $V = -V_0\delta(x - a/2)$ . Calcolare la variazione dell'energia degli autostati dell'Hamiltoniana imperturbata, al primo ordine perturbativo. Quale condizione deve soddisfare  $V_0$  affinché la perturbazione possa effettivamente considerarsi piccola ?

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

19 Giugno 2019

- **problema 1 - sistema a due livelli - [10 punti]**

Si consideri una particella di spin  $1/2$ , di massa  $m$  e fattore giromagnetico  $g$ , posta in un campo magnetico statico orientato lungo l'asse  $z$ ,  $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ .

1. Scrivere l'Hamiltoniano  $H_0$  che descrive tale situazione e trovarne autostati ed autovalori.

Al tempo  $t = 0$ , con il sistema nello stato fondamentale di  $H_0$ , viene acceso (su una scala di tempi cortissima) un ulteriore campo magnetico, perpendicolare al primo,  $\mathbf{B}_1 = (B_1, 0, 0)$ .

2. Scrivere l'espressione del nuovo Hamiltoniano e trovarne autovalori ed autovettori.
3. Scrivere l'espressione dello stato del sistema al tempo  $t$  generico, e calcolare il valor medio della componente  $z$  dello spin in funzione del tempo.

- **problema 2 - particelle identiche - [10 punti]**

Si considerino due bosoni identici, di spin  $0$  e massa  $m$ , confinati a muoversi in una dimensione spaziale e all'interno di una buca di potenziale estremamente profonda, di larghezza  $L$ .

1. Scrivere l'espressione della funzione d'onda e dell'energia dello stato fondamentale e del primo stato eccitato del sistema.
2. Se le due particelle fossero fermioni di spin  $1/2$ , le energie dello stato fondamentale e del primo eccitato ricavate nel punto precedente sarebbero diverse? se sì, di quanto?

- **problema 3 - teoria delle perturbazioni - [10 punti]**

Una particella di massa  $m$  si trova in un potenziale armonico unidimensionale di frequenza  $\omega$ .

1. Scrivere l'Hamiltoniano  $H_0$  che descrive tale situazione e indicarne autostati ed autovalori.

Essa viene sottoposta alla perturbazione  $V = \lambda x^3$ , dove  $\lambda$  è una costante con le dimensioni opportune, mentre  $x$  è l'operatore posizione della particella. Usando la teoria delle perturbazioni,

2. valutare le prime due correzioni all'energia dello stato fondamentale;
3. ottenere la forma dello stato fondamentale al primo ordine perturbativo.

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica

2 Aprile 2019

## problema 1

Si consideri una particella di massa  $m$ , vincolata a muoversi in una dimensione sotto l'azione di un potenziale armonico di frequenza  $\omega$ . Se, al tempo  $t = 0$ , la particella si trova nello stato

$$|\psi, t\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( |0\rangle + \sqrt{2} |2\rangle \right),$$

trovare il valor medio dell'energia, della posizione e della quantità di moto, come funzioni del tempo.

## problema 2

La dinamica di un rotatore piano, con momento di inerzia  $I$  e momento di dipolo elettrico  $d$  è descritta dall'Hamiltoniano  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ , con

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{L}_z^2}{2I}, \quad \hat{V} = -dE \cos \hat{\varphi},$$

dove  $\hat{V}$  descrive l'azione di un campo elettrico orientato lungo l'asse  $x$  e  $\hat{\varphi}$  è l'angolo azimutale, tale che  $\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$ . Usando la teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo, dopo aver scritto le autofunzioni e gli autovalori di  $H_0$ , valutare la prima e la seconda correzione all'energia dello stato fondamentale, dovute alla presenza di  $\hat{V}$ .

## problema 3

Quanto valgono le probabilità  $P_{2s}(a_b)$  e  $P_{2s}(2a_b)$  di trovare un elettrone nello stato  $|2s\rangle$  dell'atomo di idrogeno entro una distanza pari, rispettivamente, ad uno e due raggi di Bohr dal nucleo?

Si ricorda che la parte radiale della funzione d'onda dello stato  $|2s\rangle$  è data da

$$R_{20}(r) = \left( \frac{1}{2a_b} \right)^{3/2} \left( 2 - \frac{r}{a_b} \right) e^{-\frac{r}{2a_b}}.$$

# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

21 Febbraio 2019

- **problema 1 - sistema a due livelli - [12 punti]**

Si consideri un sistema fisico avente due configurazioni, descritte dei ket  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ , nelle quali la componente verticale del momento di dipolo elettrico ha i valori ben definiti  $\pm d_0$ , rispettivamente. L'operatore  $\hat{D}_z$  è, dunque,  $\hat{D}_z = d_0(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|)$ . L'Hamiltoniano imperturbato del sistema, espresso tramite questi stati, si scrive

$$\hat{H}_0 = \varepsilon_0(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) - A(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|).$$

1. Trovarne autostati ed autovalori.

Il sistema è perturbato dalla presenza di un campo elettrico  $\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{u}}_z$ ; pertanto l'Hamiltoniano totale diventa  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ , dove  $\hat{H}_1 = -E_0 \hat{D}_z$ .

2. Trovare gli autovalori dell'energia come funzioni del campo elettrico  $E_0$  e valutare il valor medio dell'operatore  $\hat{D}_z$  sullo stato fondamentale del sistema.
3. Assumendo il campo elettrico 'piccolo' (e dopo aver specificato 'piccolo rispetto a cosa'), sviluppare quest'ultimo valor medio in serie, in modo da ottenere la suscettività lineare  $\chi$ , tale che  $\langle \hat{D}_z \rangle \simeq \chi E_0$ .

- **problema 2 - particelle identiche - [10 punti]**

Si considerino due fermioni identici, di spin  $1/2$  e massa  $m$ , confinati a muoversi in una dimensione spaziale e sottoposti ad un potenziale armonico di frequenza  $\omega$ .

1. Scrivere l'espressione dello stato fondamentale del sistema (inclusa la parte di spin) e specificarne l'energia.
2. Se le due particelle sono costrette a mantenere lo spin orientato lungo  $z$ , cioè se gli spin sono forzati a trovarsi nello stato  $|+1, +2\rangle$ , qual è lo stato con energia più bassa possibile ?

- **problema 3 - teoria delle perturbazioni - [10 punti]**

Un atomo di idrogeno, inizialmente nello stato fondamentale,  $|n=1, l=0, m=0\rangle$ , viene sottoposto per  $t \geq 0$  alla perturbazione  $\hat{V}(t) = e\hat{z}E_0 e^{-\alpha t}$ , descrivente l'effetto di un campo elettrico variabile nel tempo,  $\mathbf{E}(t) = E_0 e^{-\alpha t} \hat{\mathbf{u}}_z$ . Utilizzando la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo al primo ordine, calcolare la probabilità che l'atomo si trovi nello stato  $|n=2, l=1, m=0\rangle$  per tempi  $t \gg \alpha^{-1}$ .

Formule utili:

elemento di matrice dell'atomo di idrogeno  $\langle 2, 1, 0 | \hat{z} | 1, 0, 0 \rangle = ca_b$ , dove  $a_b$  è il raggio di Bohr, mentre  $c \simeq 0.745$



# Prova Scritta di Meccanica Quantistica 1

1 Febbraio 2019

- **problema 1 - oscillatore armonico bidimensionale - [12 punti]**

Considerare una particella di massa  $m$  confinata a muoversi nel piano  $x$ - $y$  e soggetta ad un potenziale armonico bidimensionale di frequenza  $\omega$ , la cui dinamica è descritta dall'Hamiltoniano

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2).$$

1. Introducendo operatori di creazione e distruzione per l'asse  $x$  e, separatamente, per l'asse  $y$ , esprimere  $H$  in termini dell'operatore numero di eccitazioni  $n = a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y$ ;
2. mostrare che stati della forma  $|n_x, n_y\rangle$ , ottenuti dallo stato di vuoto  $|0, 0\rangle$  applicando  $n_x$  volte l'operatore  $a_x^\dagger$  ed  $n_y$  volte l'operatore  $a_y^\dagger$ , con  $n_x, n_y \in \mathbb{N}$ , sono autostati di  $H$  ;
3. esprimere tramite gli operatori di creazione e distruzione l'operatore  $L_z = xp_y - yp_x$  e mostrare che esso è una costante del moto.
4. mostrare che lo stato  $|0, 0\rangle$  è autostato di  $L_z$  oltre che di  $H$ ;
5. costruire le combinazioni lineari dei ket  $|0, 1\rangle$  e  $|1, 0\rangle$  che sono anche autostati di  $L_z$ .

- **problema 2 - bosoni in una buca infinita - [10 punti]**

Si considerino due bosoni identici, di spin 0 e massa  $m$ , intrappolati in una buca di potenziale infinitamente profonda e di larghezza  $L$ . Scrivere l'espressione della funzione d'onda e dell'energia per i due autostati dell'energia aventi l'autovalore più piccolo possibile. Se le due particelle hanno un'interazione descritta da  $H_{int} = -V_0 \delta(x_1 - x_2)$  (dove  $x_i$  è l'operatore posizione per la particella  $i$ -esima), valutare la correzione al primo ordine perturbativo in  $V_0$  alle energie di tali autostati.

- **problema 3 - spin 1/2 - [10 punti]**

L'interazione tra due particelle distinguibili di spin 1/2, aventi operatori di spin  $\mathbf{S}_1$  ed  $\mathbf{S}_2$ , rispettivamente, è descritta dall'Hamiltoniano

$$H = A(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 - 3S_1^z S_2^z).$$

Sapendo che all'istante  $t = 0$ , lo stato del sistema è rappresentato dal ket  $|+1, -2\rangle$ , dove  $|\pm_i\rangle$  sono gli autostati dell'operatore  $S_i^z$ , valutare il valor medio delle componenti  $z$  dello spin delle due particelle in funzione del tempo,  $\langle S_1^z(t) \rangle$  e  $\langle S_2^z(t) \rangle$ .

Formule utili:

$$\text{operatore di distruzione per un oscillatore armonico: } \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}}{x_0} + i \frac{\hat{p}}{p_0} \right) \quad \text{con } x_0 = \frac{\hbar}{m\omega} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$\text{autofunzioni di } \hat{H} \text{ per una buca infinita: } \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

## Meccanica quantistica 1

20 Novembre 2018

### Esercizio 1

In una buca di potenziale unidimensionale infinita di larghezza  $a$  si consideri lo stato descritto al tempo  $t = 0$  dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A \left[ 2 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi x}{a} + \sin \frac{3\pi x}{a} \right].$$

Dopo aver trovato la costante di normalizzazione  $A$  si determinino i valori medi della posizione e dell'impulso.

[10 punti]

### Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin  $1/2$  interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = -a (S_1^x S_2^x + S_1^y S_2^y + 2S_1^z S_2^z),$$

essendo  $S_i^x, S_i^y, S_i^z$  le componenti  $x, y, z$  dello spin della  $i$ -esima particella e  $a$  una costante. Trovare autovettori e autovalori dell'Hamiltoniana.

Se al tempo  $t = 0$  il sistema si trova nello stato  $|-\rangle|+\rangle$ , autoket simultaneo di  $S_1^z, S_2^z$  agli autovalori  $-\hbar/2, \hbar/2$ , trovare lo stato del sistema al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Un oscillatore armonico unidimensionale sia sottoposto alla perturbazione

$$V = \epsilon \hbar \omega (\hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a}),$$

essendo  $\epsilon \ll 1$ . Si determinino gli spostamenti al prim'ordine in  $\epsilon$  di tutti i livelli imperturbati e lo spostamento al second'ordine in  $\epsilon$  del livello fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{(m\omega)/(2\hbar)} (\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_\pm |j, m\rangle = \hbar \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica quantistica 1

12 Settembre 2018

### Esercizio 1

In una buca di potenziale unidimensionale infinita di larghezza  $a$  si consideri lo stato descritto al tempo  $t = 0$  dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi x}{a}.$$

Dopo aver trovato la costante di normalizzazione  $A$  si determini il valore della dispersione della posizione  $\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$  al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin  $1/2$  interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = -a(S_1^x S_2^x + S_1^y S_2^y - S_1^z S_2^z),$$

essendo  $S_i^x, S_i^y, S_i^z$  le componenti  $x, y, z$  dello spin della  $i$ -esima particella e  $a$  una costante. Trovare autovettori e autovalori dell'Hamiltoniana.

Se al tempo  $t = 0$  il sistema si trova nello stato  $|-\rangle|+\rangle$ , autoket simultaneo di  $S_1^z, S_2^z$  agli autovalori  $-\hbar/2, \hbar/2$ , trovare lo stato del sistema al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Un oscillatore armonico unidimensionale sia sottoposto alla perturbazione

$$V = \epsilon \left( m\omega^2 \hat{x}^2 - \frac{\hat{p}^2}{m} \right),$$

essendo  $\epsilon \ll 1$ . Si determinino gli spostamenti al prim'ordine in  $\epsilon$  di tutti i livelli imperturbati e lo spostamento al second'ordine in  $\epsilon$  del livello fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{(m\omega)/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica quantistica 1

11 Luglio 2018

### Esercizio 1

In una buca di potenziale unidimensionale infinita di larghezza  $a$  si consideri lo stato descritto al tempo  $t = 0$  dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A \left[ \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi x}{a} + 2 \sin \frac{\pi x}{a} \right].$$

Dopo aver trovato la costante di normalizzazione  $A$  si determini il valor medio della posizione al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 2

Due particelle di spin  $1/2$  sono descritte dall'hamiltoniana

$$H = A(\hat{S}_x^{(1)} + \hat{S}_x^{(2)})^2,$$

con  $A$  costante reale e  $\hat{S}_x^{(i)}$  componente  $x$  dello spin della  $i$ -esima particella.

Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

[10 punti]

### Esercizio 3

Un oscillatore armonico unidimensionale sia sottoposto alla perturbazione

$$V = \epsilon \alpha \hat{p}^2,$$

essendo  $\alpha$  una costante dimensionata reale ed  $\epsilon \ll 1$ . Si determinino gli spostamenti al prim'ordine in  $\epsilon$  di tutti i livelli imperturbati e lo spostamento al second'ordine in  $\epsilon$  del livello fondamentale.

[10 punti]

**Formule utili:**

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{(m\omega)/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica quantistica 1

20 Giugno 2018

### Esercizio 1

In una buca di potenziale infinita estesa da  $x = 0$  a  $x = a$  si consideri la funzione d'onda

$$\psi(x) = A \left( \sin \frac{2\pi x}{a} + \sin \frac{\pi x}{a} \right).$$

Trovare il valore di  $A$  e il valor medio della posizione e dell'impulso.

[10 punti]

### Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin  $1/2$  siano descritte dall'Hamiltoniana

$$H = -\alpha(\vec{S}_1 + 2\vec{S}_2) \cdot (\vec{S}_1 - \vec{S}_2),$$

essendo rispettivamente  $\vec{S}_1$  lo spin della prima particella e  $\vec{S}_2$  lo spin della seconda particella.

Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

Se al tempo  $t = 0$  le due particelle si trovano nello stato

$$|+\rangle|-\rangle,$$

autoket di  $S_1^z$  all'autovalore  $\hbar/2$  e di  $S_2^z$  all'autovalore  $-\hbar/2$ , trovare lo stato al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Un oscillatore armonico di pulsazione  $\omega$  e massa  $m$  è sottoposto alla perturbazione

$$V = i\epsilon A(\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger),$$

essendo  $A$  una costante finita reale e  $\epsilon \ll 1$ . Trovare la correzione al prim'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia di tutti i livelli. Trovare la correzione al second'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia del livello fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{(m\omega)/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_\pm|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica quantistica 1

4 Aprile 2018

### Esercizio 1

In una buca di potenziale unidimensionale infinita di larghezza  $a$  si consideri lo stato descritto al tempo  $t = 0$  dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A \left[ \frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi x}{a} - \sin \frac{\pi x}{a} \right].$$

Dopo aver trovato la costante di normalizzazione  $A$  si determini il valor medio della posizione al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 2

Due particelle di spin  $1/2$  sono descritte dall'hamiltoniana

$$H = A(\hat{S}_y^{(1)} - \hat{S}_y^{(2)})^2,$$

con  $A$  costante reale e  $\hat{S}_y^{(i)}$  componente  $y$  dello spin della  $i$ -esima particella.

Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

[10 punti]

### Esercizio 3

Un oscillatore armonico unidimensionale sia sottoposto alla perturbazione

$$V = \epsilon \alpha (\hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x}),$$

essendo  $\alpha$  una costante dimensionata reale ed  $\epsilon \ll 1$ . Si determinino gli spostamenti al prim'ordine in  $\epsilon$  di tutti i livelli imperturbati e lo spostamento al second'ordine in  $\epsilon$  del livello fondamentale.

[10 punti]

**Formule utili:**

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{(m\omega)/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica quantistica 1

19 Febbraio 2018

### Esercizio 1

Si consideri una particella di massa  $m$  in una buca di potenziale infinita larga  $a$ . Si supponga che al tempo  $t = 0$  la particella si trovi nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{4}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a}, & \text{per } 0 < x < \frac{a}{2} \\ 0, & \text{per } \frac{a}{2} < x < a. \end{cases}$$

Si trovi la funzione d'onda al tempo  $t$ . Facoltativamente, si trovi il valor medio della posizione al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin  $1/2$  interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = -a (S_1^+ S_2^- + S_1^- S_2^+),$$

dove  $S_i^\pm = S_i^x \pm iS_i^y$ , essendo  $S_i^x, S_i^y, S_i^z$  le componenti  $x, y, z$  dello spin della  $i$ -esima particella e  $a$  una costante. Trovare autovettori e autovalori dell'Hamiltoniana.

Se al tempo  $t = 0$  il sistema si trova nello stato  $|-\rangle|+\rangle$ , autoket simultaneo di  $S_1^z, S_2^z$  agli autovalori  $-\hbar/2, \hbar/2$ , trovare lo stato del sistema al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Si supponga che una particella di spin  $1/2$  si trovi per tempi  $t \leq 0$  nello stato  $|+\rangle$ , autoket di  $S^z$  all'autovalore  $\hbar/2$ . L'Hamiltoniana che descrive la particella sia

$$H = \alpha S^z + \epsilon \gamma \theta(t) S^x,$$

essendo  $\alpha, \gamma$  costanti,  $\theta(t)$  la funzione di Heaviside e  $\epsilon \ll 1$  un parametro adimensionale. Si trovi la probabilità al prim'ordine in  $\epsilon$  che per  $t > 0$  la particella si trovi nello stato  $|-\rangle$ , autoket di  $S^z$  all'autovalore  $-\hbar/2$ . Si trovi, sempre al prim'ordine in  $\epsilon$  lo stato della particella a tempi  $t > 0$ . Si dica infine quali devono essere le dimensioni di  $\alpha$  e  $\gamma$ .

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{J}_\pm |j, m\rangle = \hbar \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

# Meccanica quantistica 1

30 Gennaio 2018

## Esercizio 1

Si consideri l'hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - \lambda x.$$

- 1) Si scrivano e si risolvano le equazioni di Heisenberg.
- 2) Si supponga che al tempo  $t = 0$  il sistema sia descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

Si trovino i valori medi di posizione e impulso al tempo  $t$ .

[10 punti]

## Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin  $1/2$  interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = -a(S_1^x S_2^x + S_1^y S_2^y) - bS_1^z S_2^z$$

con  $S_i^x, S_i^y, S_i^z$  le componenti  $x, y, z$  dello spin della  $i$ -esima particella e  $a, b$  costanti. Trovare autovettori e autovalori dell'Hamiltoniana.

Se al tempo  $t = 0$  il sistema si trova nello stato  $|-\rangle|+\rangle$ , autoket simultaneo di  $S_1^z, S_2^z$  agli autovalori  $-\hbar/2, \hbar/2$ , trovare lo stato del sistema al tempo  $t$ .

[10 punti]

## Esercizio 3

Si supponga che un atomo di idrogeno nel suo stato fondamentale per  $t \leq 0$ , sia sottoposto dal tempo  $t = 0$  al tempo  $t = T$  ad una perturbazione della forma:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}, & \text{per } 0 < r < d \\ 0, & \text{per } r > d, \end{cases}$$

essendo  $d$  una costante tale che  $d/a \ll 1$ , con  $a$  il raggio di Bohr. Usando la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo, trovare la probabilità che per tempi maggiori di  $T$  l'atomo si trovi:

- 1) nello stato  $|200\rangle$
- 2) in uno degli stati  $|21m\rangle$  a scelta

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}}, \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2a^3}} \left(1 - \frac{r}{2a}\right) e^{-\frac{r}{2a}}, \quad R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24a^3}} \frac{r}{a} e^{-\frac{r}{2a}}$$



## Meccanica quantistica 1

21 Novembre 2017

### Esercizio 1

In una buca di potenziale infinita unidimensionale estesa da  $x = 0$  a  $x = a$  si consideri la funzione d'onda

$$\psi(x) = A \left( \sin \frac{2\pi x}{a} - \sin \frac{\pi x}{a} \right).$$

Trovare il valore di  $A$  e il valor medio della posizione e dell'impulso.

[10 punti]

### Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin  $1/2$  siano descritte dall'Hamiltoniana

$$H = -\alpha(\vec{S}_1 + 2\vec{S}_2) \cdot \vec{S}_2,$$

essendo rispettivamente  $\vec{S}_1$  lo spin della prima particella e  $\vec{S}_2$  lo spin della seconda particella.

Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

Se al tempo  $t = 0$  le due particelle si trovano nello stato

$$|+\rangle|-\rangle,$$

autoket di  $S_1^z$  all'autovalore  $\hbar/2$  e di  $S_2^z$  all'autovalore  $-\hbar/2$ , trovare lo stato al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Un oscillatore armonico unidimensionale di pulsazione  $\omega$  e massa  $m$  è sottoposto alla perturbazione

$$V = \epsilon A(\hat{a}\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger),$$

essendo  $A$  una costante finita e  $\epsilon \ll 1$ . Trovare la correzione al prim'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia di tutti i livelli. Trovare la correzione al second'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia del livello fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{(m\omega)/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_\pm |j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica quantistica 1

11 Settembre 2017

### Esercizio 1

Si consideri la funzione d'onda

$$\psi(x) = A \left[ e^{\frac{i\pi x}{a}} + B e^{-\frac{i\pi x}{a}} \right] \cos \frac{\pi x}{a}.$$

Dimostrare che solo per  $B = -1$  tale funzione può descrivere una particella in una buca di potenziale infinita estesa da  $x = 0$  a  $x = a$ .

Scelto tale valore di  $B$ , si calcoli la costante di normalizzazione  $A$ . Si faccia infine evolvere la funzione d'onda al tempo  $t$  e si trovi il valor medio della posizione.

[10 punti]

### Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin  $1/2$  siano descritte dall'Hamiltoniana

$$H = \gamma(S_x^2 + S_y^2),$$

essendo  $S_x = S_x^1 + S_x^2$ ,  $S_y = S_y^1 + S_y^2$  rispettivamente le componenti  $x$  e  $y$  dello spin totale  $\vec{S} = \vec{S}^1 + \vec{S}^2$ , somma dello spin  $\vec{S}^1$  della prima particella e dello spin  $\vec{S}^2$  della seconda particella.

Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

Se al tempo  $t = 0$  le due particelle si trovano nello stato

$$|+\rangle|-\rangle,$$

autoket di  $S_z^1$  all'autovalore  $\hbar/2$  e di  $S_z^2$  all'autovalore  $-\hbar/2$ , trovare lo stato al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Un oscillatore armonico di pulsazione  $\omega$  e massa  $m$  è sottoposto alla perturbazione

$$V = \epsilon A [(\hat{p} - \hat{x})(\hat{p} + \hat{x}) + (\hat{p} + \hat{x})(\hat{p} - \hat{x})],$$

essendo  $A$  una costante finita e  $\epsilon \ll 1$ . Trovare la correzione al prim'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia di tutti i livelli. Trovare la correzione al second'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia del livello fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{(m\omega)/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica quantistica 1

10 Luglio 2017

### Esercizio 1

Si consideri la funzione d'onda

$$\psi(x) = e^{\frac{i\pi x}{a}} \left( A \sin \frac{\pi x}{a} + B \cos \frac{\pi x}{a} \right).$$

Trovare il valore di  $B$  per il quale tale funzione può descrivere una particella in una buca di potenziale infinita estesa da  $x = 0$  a  $x = a$ .

Scelto tale valore di  $B$ , si calcoli la costante di normalizzazione  $A$ . Si trovi il valor medio della posizione e dell'impulso.

[10 punti]

### Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin  $1/2$  siano descritte dall'Hamiltoniana

$$H = -\alpha(\vec{S}_1 - \vec{S}_2)^2 - \beta(S_1^z - S_2^z)^2,$$

essendo  $S_1^z, S_2^z$  le componenti  $z$  rispettivamente dello spin  $\vec{S}_1$  della prima particella e dello spin  $\vec{S}_2$  della seconda particella.

Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

Se al tempo  $t = 0$  le due particelle si trovano nello stato

$$|+\rangle|-\rangle,$$

autoket di  $S_1^z$  all'autovalore  $\hbar/2$  e di  $S_2^z$  all'autovalore  $-\hbar/2$ , trovare lo stato al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Un oscillatore armonico di pulsazione  $\omega$  e massa  $m$  è sottoposto alla perturbazione

$$V = \epsilon A(\hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}),$$

essendo  $A$  una costante finita e  $\epsilon \ll 1$ . Trovare la correzione al prim'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia di tutti i livelli. Trovare la correzione al second'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia del livello fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{(m\omega)/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_\pm|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica quantistica 1

19 Giugno 2017

### Esercizio 1

Si consideri la funzione d'onda

$$\psi(x) = A \left[ e^{\frac{2i\pi x}{a}} + B e^{-\frac{2i\pi x}{a}} \right] \cos \frac{\pi x}{a}.$$

Dimostrare che solo per  $B = -1$  tale funzione può descrivere una particella in una buca di potenziale infinita estesa da  $x = 0$  a  $x = a$ .

Scelto tale valore di  $B$ , si calcoli la costante di normalizzazione  $A$ . Si faccia infine evolvere la funzione d'onda al tempo  $t$  e si trovi il valor medio della posizione.

[10 punti]

### Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin  $1/2$  siano descritte dall'Hamiltoniana

$$H = \gamma(S_x + iS_y)(S_x - iS_y),$$

essendo  $S_x = S_x^1 + S_x^2$ ,  $S_y = S_y^1 + S_y^2$  rispettivamente le componenti  $x$  e  $y$  dello spin totale  $\vec{S} = \vec{S}^1 + \vec{S}^2$ , somma dello spin  $\vec{S}^1$  della prima particella e dello spin  $\vec{S}^2$  della seconda particella.

Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

Se al tempo  $t = 0$  le due particelle si trovano nello stato

$$|+\rangle|-\rangle,$$

autoket di  $S_z^1$  all'autovalore  $\hbar/2$  e di  $S_z^2$  all'autovalore  $-\hbar/2$ , trovare lo stato al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Un oscillatore armonico di pulsazione  $\omega$  e massa  $m$  è sottoposto alla perturbazione

$$V = \epsilon(A\hat{p}^2 + B\hat{x}^2),$$

essendo  $A, B$  delle costanti finite e  $\epsilon \ll 1$ . Trovare la correzione al prim'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia di tutti i livelli. Trovare la correzione al second'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia del livello fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{(m\omega)/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica quantistica 1

4 Aprile 2017

### Esercizio 1

In una buca di potenziale unidimensionale infinita di larghezza  $a$  si consideri lo stato descritto al tempo  $t = 0$  dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A \left[ \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi x}{a} + \sin \frac{\pi x}{a} \right].$$

Dopo aver trovato la costante di normalizzazione  $A$  si determini il valor medio della posizione al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 2

Due particelle di spin  $1/2$  sono descritte dall'hamiltoniana

$$H = A(\hat{S}_x^{(1)} - \hat{S}_x^{(2)})^2,$$

con  $A$  costante reale e  $\hat{S}_x^{(i)}$  componente  $x$  dello spin della  $i$ -esima particella.

Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

[10 punti]

### Esercizio 3

Un oscillatore armonico unidimensionale sia sottoposto alla perturbazione

$$V = \epsilon \alpha \hat{x} \hat{p},$$

essendo  $\alpha$  una costante dimensionata reale ed  $\epsilon \ll 1$ . Si determinino gli spostamenti al prim'ordine in  $\epsilon$  di tutti i livelli imperturbati e lo spostamento al second'ordine in  $\epsilon$  del livello fondamentale.

[10 punti]

**Formule utili:**

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{(m\omega)/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica quantistica 1

21 Febbraio 2017

### Esercizio 1

Sia dato lo stato descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(x) = A \frac{e^{ikx}}{x^2 + a^2},$$

essendo  $a > 0$  e  $k$  delle costanti.

- 1) Trovare la costante di normalizzazione  $A$ .
- 2) Dimostrare che il principio di indeterminazione è soddisfatto.

La funzione d'onda evolve con l'Hamiltoniana libera

$$H = \frac{p^2}{2m}.$$

- 3) Trovare il valor medio di  $p$  al tempo  $t$ .
- 4) Trovare il valor medio di  $x$  al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin  $1/2$  interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = -a\vec{S}_1 \cdot (\vec{S}_1 + \vec{S}_2) - b\hbar(S_1^z - S_2^z)$$

con  $\vec{S}_1, \vec{S}_2$  gli operatori di spin delle due particelle e con  $S_1^z, S_2^z$  le loro componenti  $z$ . Trovare autovettori e autovalori dell'Hamiltoniana.

Se al tempo  $t = 0$  il sistema si trova nello stato  $|-\rangle|-\rangle$ , trovare lo stato del sistema al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Si supponga che un atomo di idrogeno nel suo stato fondamentale sia sottoposto ad una perturbazione della forma:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}, & \text{per } 0 < r < d \\ 0, & \text{per } r > d, \end{cases}$$

essendo  $d$  una costante tale che  $d/a \ll 1$ , con  $a$  il raggio di Bohr. Trovare la correzione al prim'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia dello stato fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}}, \quad \hat{J}_{\pm} |j, m\rangle = \hbar \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{3\pi}{8a^5}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{(x^2 + a^2)^4} = \frac{5\pi}{16a^7}$$

## Meccanica quantistica 1

30 Gennaio 2017

### Esercizio 1

Sia dato lo stato descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(x) = Ae^{-\frac{x^2}{a^2} + ikx},$$

essendo  $a$  e  $k$  delle costanti.

- 1) Trovare la costante di normalizzazione  $A$ .
- 2) Dimostrare che il principio di indeterminazione è soddisfatto al minimo.

La funzione d'onda evolve con l'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} - Fx,$$

con  $F$  una costante.

- 3) Trovare la dispersione di  $p$  al tempo  $t$ .
- 4) Trovare la dispersione di  $x$  al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 2

Un elettrone all'istante  $t = 0$  si trova nello stato

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|1, 1\rangle(|-\rangle + |+\rangle),$$

essendo  $|1, 1\rangle$  autoket simultaneo del quadrato del momento angolare orbitale e della sua componente  $z$ , con autovalori rispettivamente  $2\hbar^2$  e  $\hbar$ , e  $|\pm\rangle$  autoket della componente  $z$  dello spin con autovalore  $\pm\hbar/2$ .

L'elettrone sia sottoposto all'hamiltoniana

$$H = -\alpha(\vec{L} + \vec{S})^2 + \beta\hbar(L_z + S_z),$$

essendo  $\alpha, \beta$  costanti dimensionate e indicando  $\vec{L}$  il momento angolare orbitale e  $\vec{S}$  lo spin dell'elettrone ( $L_z$  e  $S_z$  sono le loro componenti  $z$ ). Quali sono le dimensioni delle costanti  $\alpha$  e  $\beta$ ? Trovare poi lo stato dell'elettrone al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Si supponga che un atomo di idrogeno nel suo stato fondamentale sia sottoposto ad una perturbazione

$$V(r) = \begin{cases} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d}\right), & \text{per } 0 < r < d \\ 0, & \text{per } r > d, \end{cases}$$

essendo  $d$  una costante tale che  $d/a \ll 1$ , con  $a$  il raggio di Bohr. Trovare la correzione al prim'ordine (in teoria delle perturbazioni) dell'energia dello stato fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}}, \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica quantistica 1

2 Novembre 2016

### Esercizio 1

Tra tutti gli stati di un oscillatore armonico unidimensionale trovare lo stato  $|\psi\rangle$  tale che:

- 1) una misura dell'energia fornisca i valori  $\hbar\omega/2$  e  $3\hbar\omega/2$ , entrambi con probabilità  $1/2$ ;
- 2) il valor medio dell'impulso sia nullo.

Dimostrare infine che su tale stato il principio di indeterminazione è soddisfatto.

[10 punti]

### Esercizio 2

Un elettrone all'istante  $t = 0$  si trova nello stato

$$|1 - 1\rangle|+\rangle,$$

essendo  $|1 - 1\rangle$  autoket simultaneo del quadrato del momento angolare orbitale e della sua componente  $z$ , con autovalori rispettivamente  $2\hbar^2$  e  $-\hbar$ , e  $|+\rangle$  autoket della componente  $z$  dello spin con autovalore  $\hbar/2$ .

L'elettone sia sottoposto all'hamiltoniana

$$H = -\alpha(\vec{L} + \vec{S})^2,$$

essendo  $\alpha$  una costante dimensionata e indicando  $\vec{L}$  il momento angolare orbitale e  $\vec{S}$  lo spin dell'elettone. Trovare lo stato dell'elettone al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Una particella di massa  $m$  si trova in una buca di potenziale infinita unidimensionale estesa da  $x = 0$  a  $x = a$ . Il sistema viene perturbato da un potenziale del tipo

$$V = \epsilon\beta x^2,$$

con  $\beta$  una costante dimensionata e  $\epsilon \ll 1$ . Quali sono le dimensioni di  $\beta$ ?

Trovare le correzioni a tutti i livelli energetici al prim'ordine in  $\epsilon$ .

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{(m\omega)/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle \quad (0.1)$$



# Meccanica quantistica 1

15 Settembre 2016

## Esercizio 1

Tra tutti gli stati di un oscillatore armonico unidimensionale trovare lo stato  $|\psi\rangle$  tale che:

- 1) una misura dell'energia fornisca i valori  $\hbar\omega/2$  e  $3\hbar\omega/2$ , entrambi con probabilità  $1/2$ ;
- 2) il valor medio della posizione sia nullo.

Dimostrare infine che su tale stato il principio di indeterminazione è soddisfatto.

[10 punti]

## Esercizio 2

Un elettrone all'istante  $t = 0$  si trova nello stato

$$|1\ 1\rangle|-\rangle,$$

essendo  $|1\ 1\rangle$  autoket simultaneo del quadrato del momento angolare orbitale e della sua componente  $z$ , con autovalori rispettivamente  $2\hbar^2$  e  $\hbar$ , e  $|-\rangle$  autoket della componente  $z$  dello spin con autovalore  $-\hbar/2$ .

L'elettone sia sottoposto all'hamiltoniana

$$H = -\alpha(\vec{L} + \vec{S})^2,$$

essendo  $\alpha$  una costante dimensionata e indicando  $\vec{L}$  il momento angolare orbitale e  $\vec{S}$  lo spin dell'elettone. Trovare lo stato dell'elettone al tempo  $t$ .

[10 punti]

## Esercizio 3

Una particella di massa  $m$  si trova in una buca di potenziale infinita unidimensionale estesa da  $x = 0$  a  $x = a$ . Il sistema viene perturbato da un potenziale del tipo

$$V = \epsilon\beta x,$$

con  $\beta$  una costante dimensionata e  $\epsilon \ll 1$ . Quali sono le dimensioni di  $\beta$ ?

Trovare le correzioni a tutti i livelli energetici al prim'ordine in  $\epsilon$ .

Scrivere l'espressione per la correzione al livello fondamentale al second'ordine in  $\epsilon$ .

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica quantistica 1

7 Luglio 2016

### Esercizio 1

In una buca di potenziale unidimensionale infinita si consideri lo stato descritto al tempo  $t = 0$  dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A \left[ \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi x}{a} + \sin \frac{3\pi x}{a} \right].$$

Dopo aver trovato la costante di normalizzazione  $A$  si determini il valor medio della posizione al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 2

Due particelle di spin 1 sono sottoposte all'Hamiltoniana

$$H = -\alpha \left[ L_z^{(1)} L_z^{(2)} \right]^2,$$

essendo  $L_z^{(1)}$ ,  $L_z^{(2)}$  le componenti  $z$  del momento angolare rispettivamente della prima e della seconda particella. Al tempo  $t = 0$  le due particelle si trovano nello stato  $|\psi\rangle_0$  tale che

$$L_x^{(1)} |\psi\rangle_0 = 0, \quad L_z^{(2)} |\psi\rangle_0 = |\psi\rangle_0,$$

essendo  $L_x^{(1)}$  la componente  $x$  del momento angolare della prima particella. Si scriva lo stato del sistema al tempo  $t$  nella base degli autoket simultanei di  $L_z^{(1)}$  e  $L_z^{(2)}$ . Si determini infine il valor medio di  $L_x^{(1)}$  al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Un oscillatore armonico unidimensionale sia sottoposto alla perturbazione

$$V = \epsilon(\alpha p + \beta p^2),$$

essendo  $p$  l'operatore impulso,  $\alpha$  e  $\beta$  due costanti dimensionate reali ed  $\epsilon \ll 1$ . Trovate le dimensioni di  $\alpha$  e  $\beta$ , si determinino gli spostamenti al prim'ordine in  $\epsilon$  di tutti i livelli imperturbati e lo spostamento al second'ordine in  $\epsilon$  del livello fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica Quantistica 1

16 giugno 2016

### Esercizio 1

Dato un oscillatore armonico unidimensionale si consideri lo stato

$$|\psi\rangle = \sin \alpha |0\rangle + \cos \alpha e^{i\beta} |1\rangle,$$

essendo  $\alpha, \beta$  costanti reali arbitrarie. Si determinino come funzioni di  $\alpha$  e di  $\beta$  i valori medi di posizione e impulso sullo stato  $|\psi\rangle$ .

Si trovino i valori medi di posizione e impulso al tempo  $t$  usando lo schema di Schrödinger.

[11 punti]

### Esercizio 2

Siano date due particelle distinguibili di spin  $1/2$ . Si supponga che l'hamiltoniana che descrive la loro interazione sia

$$H = a\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + bS_1^x S_2^x,$$

essendo  $a, b$  costanti reali e  $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$ ,  $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$  rispettivamente gli operatori di spin della prima e della seconda particella. Si trovino autovalori e autovettori di  $H$ .

Se al tempo  $t = 0$  il sistema si trova nell'autoket simultaneo di  $S_1^z$  all'autovalore  $\hbar/2$  e di  $S_2^z$  all'autovalore  $\hbar/2$ , trovare lo stato del sistema al tempo  $t$ .

[11 punti]

### Esercizio 3

Una buca di potenziale infinita in una dimensione di larghezza  $a$  (quindi  $0 < x < a$ ) sia perturbata da un potenziale della forma  $V = \epsilon V_0$  per  $0 < x < a/2$  e  $V = 0$  per  $a/2 < x < a$ , con  $V_0$  una costante delle dimensioni dell'energia e  $\epsilon \ll 1$ .

Determinare la correzione al prim'ordine in teoria perturbativa di tutti i livelli imperturbati.

[8 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica quantistica 1

25 Febbraio 2016

### Esercizio 1

Dato un oscillatore armonico unidimensionale si consideri lo stato

$$|\psi\rangle = A \hat{x} |0\rangle,$$

con  $A$  costante di normalizzazione. Trovare il valore di  $A$ . Dimostrare poi che la relazione di indeterminazione è soddisfatta. Trovare infine l'evoluto temporale dello stato  $|\psi\rangle$  al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 2

Due particelle identiche di spin  $1/2$  siano sottoposte all'hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2) + \lambda \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2,$$

essendo  $\hat{x}_i$ ,  $\hat{p}_i$ ,  $\vec{S}_i$  ( $i = 1, 2$ ) la coordinata, l'impulso e lo spin della  $i$ -esima particella. Trovare autovalori e autovettori dell'hamiltoniana  $\hat{H}$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Una particella di massa  $m$  si trova in una buca di potenziale infinita bidimensionale di lato  $a$  ( $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq a$ ). Scrivere autovalori e autofunzioni dell'hamiltoniana. Il sistema viene poi perturbato dal potenziale

$$V = \epsilon\beta \delta\left(x - \frac{a}{2}\right) \delta\left(y - \frac{a}{2}\right),$$

con  $\beta$  una costante dimensionata e  $\epsilon \ll 1$ . Trovare le correzioni a tutti i livelli energetici al prim'ordine in  $\epsilon$ .

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_\pm |j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica quantistica 1

11 Febbraio 2016

### Esercizio 1

Tra tutti gli stati di un oscillatore armonico bidimensionale

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2),$$

trovare lo stato  $|\psi\rangle$  tale che:

- 1) se si misura l'energia si ottiene sempre il valore  $2\hbar\omega$
- 2) valgono le seguenti uguaglianze

$$\langle\psi|x^2|\psi\rangle = \langle\psi|y^2|\psi\rangle = 4\langle\psi|xy|\psi\rangle.$$

Dimostrare che il principio di indeterminazione è soddisfatto.

[10 punti]

### Esercizio 2

Un elettrone all'istante  $t = 0$  si trova nello stato

$$|1, 0\rangle|+\rangle,$$

essendo  $|1, 0\rangle$  autoket simultaneo del quadrato del momento angolare orbitale e della sua componente  $z$ , con autovalori rispettivamente  $2\hbar^2$  e  $0$ , e  $|+\rangle$  autoket della componente  $z$  dello spin con autovalore  $\hbar/2$ .

L'elettrone sia sottoposto all'hamiltoniana

$$H = -\alpha(\vec{L} + \vec{S})^2,$$

essendo  $\alpha$  una costante dimensionata e indicando  $\vec{L}$  il momento angolare orbitale e  $\vec{S}$  lo spin dell'elettrone. Quali sono le dimensioni della costante  $\alpha$ ? Trovare poi lo stato dell'elettrone al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Una particella di massa  $m$  si trova in una buca di potenziale infinita unidimensionale estesa da  $x = 0$  a  $x = a$ . Il sistema viene perturbato da un potenziale del tipo

$$V = \epsilon\beta\delta\left(x - \frac{a}{4}\right),$$

con  $\beta$  una costante dimensionata e  $\epsilon \ll 1$ . Quali sono le dimensioni di  $\beta$ ?

Trovare le correzioni a tutti i livelli energetici al prim'ordine in  $\epsilon$ .

Scrivere l'espressione per la correzione al livello fondamentale al second'ordine in  $\epsilon$ .

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica Quantistica

8 Settembre 2015

### Esercizio 1

Al tempo  $t = 0$  sia data la funzione d'onda:

$$\psi(x) = Ae^{-\frac{|x|}{2}}.$$

Si trovi la costante di normalizzazione  $A$ .

Il sistema evolva con l'hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} - \alpha x,$$

essendo  $\alpha$  una costante reale. Si scrivano e si risolvano le equazioni di Heisenberg per posizione e impulso. Si usi questo risultato per trovare i valori medi di posizione e impulso al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin  $1/2$  interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = a(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) + b(S_1^z S_2^z)^2,$$

essendo  $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$ ,  $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$  gli operatori relativi alle componenti  $x, y, z$  dello spin rispettivamente della prima e della seconda particella ed essendo  $a, b$  costanti reali.

- Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.
- Se a  $t = 0$  il sistema si trova nell'autoket di  $S_1^z$  e  $S_2^z$  agli autovalori  $\frac{\hbar}{2}$ , trovare lo stato del sistema al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale di massa  $m$  e pulsazione  $\omega$ . Il sistema sia perturbato da un potenziale della forma

$$V(x) = \hbar\omega \epsilon [\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2],$$

essendo  $\epsilon \ll 1$ . Si determini:

- Lo spostamento al primo ordine in  $\epsilon$  del livello energetico  $n$ -esimo.
- Lo spostamento al secondo ordine in  $\epsilon$  del livello energetico  $n$ -esimo.

[10 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_\pm |j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica Quantistica 1

21 Luglio 2015

### Esercizio 1

Dato un oscillatore armonico unidimensionale, si consideri lo stato

$$|\psi_0\rangle = e^{\frac{i\ell\hat{x}}{\hbar}}|0\rangle$$

con  $\ell$  costante reale.

a) Si calcolino i valori medi:

$$\langle\psi_0|\hat{x}|\psi_0\rangle, \quad \langle\psi_0|\hat{p}|\psi_0\rangle, \quad \langle\psi_0|\hat{x}^2|\psi_0\rangle, \quad \langle\psi_0|\hat{p}^2|\psi_0\rangle.$$

b) Si verifichi che il principio di indeterminazione è soddisfatto.

[10 punti]

### Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin 1/2 interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = a(S_1^y S_2^y + S_1^z S_2^z),$$

essendo  $S_1^y, S_2^y, S_1^z, S_2^z$  gli operatori relativi alle componenti  $y$  e  $z$  dello spin della prima e della seconda particella ed essendo  $a$  una costante positiva.

a) Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

b) Se a  $t = 0$  il sistema si trova nell'autoket di  $S_1^z$  e  $S_2^z$  agli autovalori  $\frac{\hbar}{2}$ , trovare lo stato del sistema al tempo  $t$ .

[9 punti]

### Esercizio 3

Sia data l'hamiltoniana imperturbata

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$$

con  $\delta$  reale. Si consideri la perturbazione

$$V = A\epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con  $A$  costante e  $\epsilon \ll 1$ . Usando la teoria delle perturbazioni, si trovino le correzioni ai livelli energetici al primo e al second'ordine in  $\epsilon$ . Si confronti il risultato così trovato con la diagonalizzazione esatta di  $H_0 + V$ .

[11 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica Quantistica 1

16 Giugno 2015

### Esercizio 1

Dato un oscillatore armonico unidimensionale, si consideri lo stato

$$|\psi_0\rangle = e^{\frac{i\ell\hat{p}}{\hbar}}|0\rangle,$$

dove  $\ell$  è una costante reale.

a) Si calcolino i valori medi:

$$\langle\psi_0|\hat{x}|\psi_0\rangle, \quad \langle\psi_0|\hat{p}|\psi_0\rangle, \quad \langle\psi_0|\hat{x}^2|\psi_0\rangle, \quad \langle\psi_0|\hat{p}^2|\psi_0\rangle.$$

b) Si verifichi che il principio di indeterminazione è soddisfatto.

[10 punti]

### Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin 1/2 interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = a(S_1^x S_2^x + S_1^y S_2^y),$$

essendo  $S_1^x, S_2^x, S_1^y, S_2^y$  gli operatori relativi alle componenti  $x$  e  $y$  dello spin della prima e della seconda particella ed essendo  $a$  una costante positiva.

a) Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

b) Se a  $t = 0$  il sistema si trova nell'autoket di  $S_1^z$  e  $S_2^z$  agli autovalori  $\frac{\hbar}{2}$ , trovare lo stato del sistema al tempo  $t$ .

[9 punti]

### Esercizio 3

Sia data l'hamiltoniana imperturbata

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & i\delta \\ -i\delta & 0 \end{pmatrix}$$

dove  $\delta$  è una costante reale. Si consideri la perturbazione

$$V = A\epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con  $A$  costante reale e  $\epsilon \ll 1$ . Usando la teoria delle perturbazioni, si trovino le correzioni ai livelli energetici al primo e al second'ordine in  $\epsilon$ . Si confronti il risultato così trovato con la diagonalizzazione esatta di  $H_0 + V$ .

[11 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$



## Meccanica Quantistica 1

13 Aprile 2015

### Esercizio 1

Dato un oscillatore armonico unidimensionale, si consideri lo stato al tempo  $t = 0$ :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + i|2\rangle) .$$

Si trovino i valori medi di  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$ ,  $\hat{x}^2$ ,  $\hat{p}^2$ .

Si scriva lo stato al tempo  $t$  e si trovino i valori medi di  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$ ,  $\hat{x}^2$ ,  $\hat{p}^2$  al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 2

Siano date due particelle distinguibili di spin  $1/2$ . Si supponga che l'hamiltoniana che le descrive abbia la forma

$$H = -a(\vec{S}_1 + 2\vec{S}_2)^2 + bS_1^z S_2^z ,$$

essendo  $a, b$  costanti reali e  $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$ ,  $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$  rispettivamente gli operatori di spin della prima e della seconda particella. Determinare autovalori e autoket dell'hamiltoniana.

Si supponga poi che al tempo  $t = 0$  il sistema si trovi nello stato autoket simultaneo di  $S_1^z$  all'autovalore  $\hbar/2$  e di  $S_2^z$  all'autovalore  $-\hbar/2$ . Si trovi l'evoluto di tale stato al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Si consideri una buca di potenziale infinita estesa da 0 ad  $a$ .

Si consideri la perturbazione

$$V = \epsilon E \sin \frac{\pi x}{a} ,$$

essendo  $\epsilon \ll 1$  e  $E$  una costante delle dimensioni di un'energia. Si trovino le correzioni a tutti i livelli energetici al prim'ordine in  $\epsilon$ .

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} , \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)) , \quad \hat{J}_{\pm} |j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica Quantistica 1

18 Febbraio 2015

### Esercizio 1

Si consideri lo stato descritto dalla funzione d'onda in rappresentazione delle coordinate definita da

$$\psi(x) = A \quad \text{per} \quad -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}, \quad \psi(x) = 0 \quad \text{altrove},$$

essendo  $a$  una costante. Si trovino la costante di normalizzazione  $A$  e i valori medi di  $x$  e  $x^2$ .

Si scriva la funzione d'onda in rappresentazione degli impulsi.

Si supponga che lo stato evolva nel tempo con l'hamiltoniana libera  $H = \frac{p^2}{2m}$ . Si scriva la funzione d'onda in rappresentazione degli impulsi al tempo  $t$  e la si usi per trovare il valor medio della posizione al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 2

Siano date due particelle distinguibili di spin  $1/2$ . Si supponga che l'hamiltoniana che le descrive abbia la forma

$$H = -a(\vec{S}_1 - \vec{S}_2)^2 + b(S_1^z - S_2^z)^2,$$

essendo  $a, b$  costanti reali e  $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$ ,  $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$  rispettivamente gli operatori di spin della prima e della seconda particella. Determinare autovalori e autoket dell'hamiltoniana.

Si supponga poi che al tempo  $t = 0$  il sistema si trovi nello stato autoket simultaneo di  $S_1^x$  all'autovalore  $\hbar/2$  e di  $S_2^z$  all'autovalore  $\hbar/2$ . Si trovi l'evoluto di tale stato al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Si consideri una particella di spin  $1/2$ . Date le tre matrici di Pauli  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , si supponga che la sua hamiltoniana sia

$$H_0 = Ee^{\sigma_z},$$

con  $E$  una costante delle dimensioni di un'energia. Si trovino autoket e autovalori di  $H_0$ .

Si supponga ora che  $H_0$  sia perturbata dall'operatore

$$V = \epsilon E e^{\sigma_x}, \quad \epsilon \ll 1.$$

Si trovino gli autovalori di  $H_0 + V$  al primo e al secondo ordine in  $\epsilon$ .

[10 punti]

Formule utili:

$$\hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica Quantistica 1

2 Febbraio 2015

### Esercizio 1

Sia data la funzione d'onda unidimensionale

$$\psi(x) = Ae^{-\alpha \frac{x^2}{2}}$$

con  $\alpha > 0$ . Si trovino la costante di normalizzazione  $A$  e i valori medi di posizione e impulso.

La funzione d'onda evolva nel tempo secondo l'hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

dove  $m > 0$  e  $\omega$  è reale. Scrivere come evolvono nel tempo i valori medi di posizione e impulso e le loro dispersioni.

La funzione d'onda  $\psi(x)$  è autofunzione dell'hamiltoniana  $H$ ?

[10 punti]

### Esercizio 2

Siano date due particelle distinguibili di spin  $1/2$ . Si supponga che l'hamiltoniana che le descrive abbia la forma

$$H = -a(\vec{S}_1 - \vec{S}_2)^2 + b\hbar(S_1^z - S_2^z),$$

essendo  $a, b$  costanti reali e  $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$ ,  $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$  rispettivamente gli operatori di spin della prima e della seconda particella. Determinare autovalori e autoket dell'hamiltoniana.

Si supponga poi che al tempo  $t = 0$  il sistema si trovi nello stato autoket simultaneo di  $S_1^x$  all'autovalore  $\hbar/2$  e di  $S_2^z$  all'autovalore  $-\hbar/2$ . Si trovi l'evoluto di tale stato al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

In una buca di potenziale infinita bidimensionale quadrata di lato  $a$ , si consideri la perturbazione

$$V(x) = \epsilon xy,$$

essendo  $\epsilon \ll 1$ . Si determini la correzione al prim'ordine in  $\epsilon$  del livello fondamentale e del primo livello eccitato.

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica Quantistica

20 Novembre 2014

### Esercizio 1

Dato un oscillatore armonico unidimensionale si consideri lo stato

$$|\psi\rangle = \cos\alpha|0\rangle + \sin\alpha e^{i\beta}|1\rangle,$$

essendo  $\alpha, \beta$  costanti arbitrarie. Si determinino come funzioni di  $\alpha$  e di  $\beta$  i valori medi di posizione e impulso sullo stato  $|\psi\rangle$ .

Si trovino i valori medi di posizione e impulso al tempo  $t$  usando lo schema di Heisenberg.

[12 punti]

### Esercizio 2

Siano date due particelle distinguibili di spin  $1/2$ . Si supponga che l'hamiltoniana che descrive la loro interazione sia

$$H = aS_1^x S_2^x + bS_1^z S_2^z,$$

essendo  $a, b$  costanti reali e  $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$ ,  $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$  rispettivamente gli operatori di spin della prima e della seconda particella. Si trovino autovalori e autovettori di  $H$ .

Se al tempo  $t = 0$  il sistema si trova nell'autoket simultaneo di  $S_1^z$  all'autovalore  $\hbar/2$  e di  $S_2^z$  all'autovalore  $\hbar/2$ , trovare lo stato del sistema al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Una buca di potenziale infinita in una dimensione di larghezza  $a$  sia perturbata da un potenziale della forma

$$V = \epsilon x.$$

Determinare la correzione al prim'ordine in teoria perturbativa di tutti i livelli imperturbati.

[8 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica Quantistica

2 Settembre 2014

### Esercizio 1

Si consideri al tempo  $t = 0$  lo stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = Ae^{-x^2+2x}.$$

Si determini la costante di normalizzazione  $A$  e quindi si determinino i valori medi dell'impulso e della posizione.

Lo stato in questione evolve con l'hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} - Fx,$$

dove  $F$  è una costante. Si trovino quindi i valori medi della posizione e dell'impulso ad un generico istante di tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 2

Siano date due particelle distinguibili di spin  $1/2$ . Si supponga che l'hamiltoniana che le descrive abbia la forma

$$H = -a(\vec{S}_1 - \vec{S}_2)^2 + b\hbar S_1^z S_2^z,$$

essendo  $a, b$  costanti reali e  $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$ ,  $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$  rispettivamente gli operatori di spin della prima e della seconda particella. Determinare autovalori e autoket dell'hamiltoniana.

Si supponga poi che al tempo  $t = 0$  il sistema si trovi nello stato autoket simultaneo di  $S_1^z$  all'autovalore  $\hbar/2$  e di  $S_2^z$  all'autovalore  $\hbar/2$ . Si trovi l'evoluto di tale stato al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Un'oscillatore armonico bidimensionale, descritto quindi dall'hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2),$$

è perturbato dal termine

$$V = \epsilon\alpha(xp_y - yp_x),$$

essendo  $\alpha$  una costante e  $\epsilon \ll 1$ . Si trovino le correzioni al prim'ordine in  $\epsilon$  del livello fondamentale e del primo livello eccitato.

[10 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica Quantistica

22 Luglio 2014

### Esercizio 1

Sia data una buca di potenziale infinita estesa da 0 ad  $a$ . Si consideri lo stato a  $t = 0$ :

$$\psi(x) = A \sin \frac{\pi x}{a} \left( 2 \cos \frac{\pi x}{a} + 1 \right),$$

essendo  $A$  una costante.

- 1) Trovare la costante di normalizzazione  $A$ .
- 2) Trovare lo stato evoluto al tempo  $t$ .
- 3) Trovare il valor medio della posizione al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 2

Siano date due particelle di spin  $1/2$  e si consideri lo stato in cui il loro spin totale è  $1$  e la componente  $z$  del loro spin totale è zero. Determinare su tale stato i valori medi di

$$H_{xx} = S_1^x S_2^x, \quad H_{xz} = S_1^x S_2^z, \quad H_{zz} = S_1^z S_2^z,$$

essendo  $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$ ,  $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$  rispettivamente gli operatori di spin relativi alla prima e alla seconda particella.

[10 punti]

### Esercizio 3

Sia dato un oscillatore armonico unidimensionale di massa  $m$  e pulsazione  $\omega$ . Si supponga che l'hamiltoniana sia perturbata dal termine

$$V = \epsilon \alpha (\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger),$$

essendo  $\alpha$  una costante e essendo  $\epsilon \ll 1$  ( $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{a}$  sono gli operatori di creazione e distruzione).

Si trovino le correzioni agli autovalori al primo e al secondo ordine in  $\epsilon$ .

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_\pm |j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica Quantistica

10 Giugno 2014

### Esercizio 1

Sia dato un oscillatore armonico unidimensionale. Si consideri lo stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{i\phi}|1\rangle),$$

dove  $\phi$  è una fase arbitraria.

1) Si trovino i valori medi di posizione, impulso, energia cinetica e energia potenziale.

2) Si verifichi la validità del principio di indeterminazione.

[12 punti]

### Esercizio 2

Siano date due particelle distinguibili di spin  $1/2$ . Si supponga che l'hamiltoniana che le descrive abbia la forma

$$H = -a(\vec{S}_1 - \vec{S}_2)^2 + b\hbar S_1^z,$$

essendo  $a, b$  costanti reali e  $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$ ,  $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$  rispettivamente gli operatori di spin della prima e della seconda particella. Determinare autovalori e autoket dell'hamiltoniana.

Si supponga poi che al tempo  $t = 0$  il sistema si trovi nello stato autoket simultaneo di  $S_1^z$  all'autovalore  $\hbar/2$  e di  $S_2^z$  all'autovalore  $-\hbar/2$ . Si trovi l'evoluto di tale stato al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

In una buca di potenziale infinita unidimensionale estesa da 0 ad  $a$ , si consideri la perturbazione

$$V(x) = \epsilon V_0 \quad \text{per} \quad \frac{a}{3} < x < \frac{2a}{3} \quad ; \quad V(x) = 0 \quad \text{altrove},$$

essendo  $\epsilon \ll 1$ . Si determini la correzione al prim'ordine in  $\epsilon$  di tutti i livelli.

[8 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica Quantistica

8 Aprile 2014

### Esercizio 1

Sia dato un oscillatore armonico unidimensionale. Si determini lo stato  $|\psi\rangle$  tale che:

- 1) una misura dell'energia dia il valore  $\hbar\omega/2$  con probabilità  $1/4$  e  $3\hbar\omega/2$  con probabilità  $3/4$ ;
- 2) il valor medio della posizione nello stato  $|\psi\rangle$  sia zero.

Si determinino poi l'evoluto temporale di  $|\psi\rangle$  al tempo  $t$  e il valor medio dell'energia potenziale al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 2

Siano date due particelle distinguibili di spin 1. Si supponga che l'hamiltoniana che le descrive abbia la forma

$$H = A\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2,$$

essendo  $A$  una costante reale e  $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$ ,  $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$  rispettivamente gli operatori di spin della prima e della seconda particella. Determinare autovalori e autoket dell'hamiltoniana.

Si supponga poi che al tempo  $t = 0$  il sistema si trovi nello stato autoket simultaneo di  $S_1^z$  all'autovalore  $\hbar$  e di  $S_2^z$  all'autovalore zero. Si trovi l'evoluto di tale stato al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Data una particella di spin 1, si supponga che sia descritta dall'hamiltoniana

$$H_0 = AS^2 + B\hbar S_z,$$

essendo  $A, B$  costanti reali non nulle e  $S^2, S_z$  rispettivamente il quadrato e la componente  $z$  dello spin.

Si trovino autostati e autovalori di  $H_0$ . Si supponga poi che  $H_0$  sia perturbata dall'operatore

$$V = \epsilon C\hbar S_x, \quad \epsilon \ll 1,$$

con  $C$  costante reale e  $S_x$  componente  $x$  dello spin. Si trovino le correzioni agli autovalori al primo e al secondo ordine in  $\epsilon$ .

[10 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$



## Meccanica Quantistica

13 Febbraio 2014

### Esercizio 1

Si consideri una buca di potenziale infinita unidimensionale estesa da 0 ad  $a$  (ossia il potenziale è zero per  $0 < x < a$  e infinito altrove). Si supponga che la funzione d'onda al tempo  $t = 0$  sia

$$\psi_{t=0}(x) = A \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{2\pi x}{a}.$$

- 1) Si trovi la costante  $A$ .
- 2) Se si misura l'energia quali valori si possono trovare e con quali probabilità?
- 3) Trovare l'evoluto temporale al tempo  $t$  dello stato descritto da  $\psi_{t=0}(x)$ .
- 4) Trovare il valor medio della posizione al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin  $1/2$  interagiscono con l'hamiltoniana

$$H = a \left[ (\vec{S}_1 + \vec{S}_2) + \hbar \vec{a} \right]^2,$$

essendo  $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$ ,  $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$  rispettivamente gli operatori di spin relativi alla prima e alla seconda particella e  $a = (0, 0, 1)$  un versore diretto lungo l'asse  $z$ .

- 1) Trovare autoket e autovalori dell'hamiltoniana.
- 2) Se a  $t = 0$  il sistema si trova nell'autoket simultaneo di  $S_1^x$  all'autovalore  $\frac{\hbar}{2}$  e di  $S_2^x$  all'autovalore  $\frac{\hbar}{2}$ , trovare lo stato del sistema al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Una particella di spin  $1/2$  sia descritta dall'hamiltoniana

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2 + \omega S^z,$$

essendo  $\hat{p}$  l'operatore impulso,  $\hat{x}$  l'operatore posizione e  $S^z$  la componente  $z$  dell'operatore di spin.

- 1) Si trovino autoket e autovalori dell'hamiltoniana.
- 2) Il sistema sia poi perturbato da un potenziale

$$V = \epsilon \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \hat{x} S^x,$$

essendo  $\hat{x}$  l'operatore posizione,  $S^x$  la componente  $x$  dell'operatore di spin ed essendo  $\epsilon \ll 1$ . Si trovi la correzione al prim'ordine di tutti i livelli energetici imperturbati determinati nel punto 1).

[10 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$\hat{J}_{\pm} |j, m\rangle = \hbar \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica Quantistica

30 Gennaio 2014

### Esercizio 1

Si consideri l'hamiltoniana unidimensionale

$$\hat{H} = \alpha(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})$$

essendo  $\alpha$  una costante reale delle dimensioni dell'inverso di un tempo e  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$  gli operatori impulso e posizione, rispettivamente.

- 1) Scrivere e risolvere le equazioni di Heisenberg per  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$ .
- 2) Dimostrare che il prodotto delle dispersioni  $\Delta\hat{x}^2\Delta\hat{p}^2$  non dipende dal tempo.
- 3) Scrivere l'operatore di evoluzione temporale  $U = e^{-\frac{it\hat{H}}{\hbar}}$  in rappresentazione delle coordinate e trovare l'evoluto al tempo  $t$  di un generico stato descritto a  $t = 0$  dalla funzione d'onda  $\psi(x)$ .
- 4) Scrivere l'operatore di evoluzione temporale  $U = e^{-\frac{it\hat{H}}{\hbar}}$  in rappresentazione degli impulsi e trovare l'evoluto al tempo  $t$  di un generico stato descritto a  $t = 0$  dalla funzione d'onda  $\phi(p)$ .

[10 punti]

### Esercizio 2

Una particella di spin 1/2 e una di spin 1 interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = a\vec{S} \cdot \vec{L} + b\hbar(S_x + L_x),$$

essendo  $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ ,  $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$  rispettivamente gli operatori di spin relativi alla prima e alla seconda particella.

- a) Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.
- b) Se a  $t = 0$  il sistema si trova nell'autoket simultaneo di  $S_z$  all'autovalore  $\frac{\hbar}{2}$  e di  $L_z$  all'autovalore  $\hbar$ , trovare lo stato del sistema al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Si consideri l'Hamiltoniana in due dimensioni (oscillatore armonico più perturbazione):

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + \epsilon\omega(xp_y - yp_x)$$

essendo  $\epsilon \ll 1$ .

Determinare la correzione al prim'ordine dei tre livelli energetici più bassi.

[10 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica Quantistica

20 Novembre 2013

### Esercizio 1

Determinare lo stato di un oscillatore armonico unidimensionale di massa  $m$  e pulsazione  $\omega$  in cui

- una misura dell'energia fornisce solo i valori  $\frac{\hbar\omega}{2}$  e  $3\frac{\hbar\omega}{2}$  e in media dà  $\hbar\omega$ ;
- il valor medio della posizione sia zero.

Si verifichi poi che per questo stato il principio di indeterminazione di Heisenberg è soddisfatto.

[12 punti]

### Esercizio 2

Siano date due particelle di spin  $1/2$  e si consideri lo stato in cui il loro spin totale è 0. Determinare su tale stato i valori medi di

$$H_{xx} = S_1^x S_2^x, \quad H_{xy} = S_1^x S_2^y,$$

essendo  $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$ ,  $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$  rispettivamente gli operatori di spin relativi alla prima e alla seconda particella.

[8 punti]

### Esercizio 3

Si consideri una buca di potenziale infinita unidimensionale di larghezza  $a$  (ossia il potenziale è zero per  $0 < x < a$  e infinito altrove). Il sistema sia perturbato da un potenziale della forma

$$V(x) = \epsilon V_0, \quad 0 < x < \frac{a}{2}, \quad V(x) = 0 \quad \text{altrove},$$

essendo  $\epsilon \ll 1$ .

- 1) Si determini lo spostamento al prim'ordine in  $\epsilon$  del livello energetico  $n$ -esimo.
- 2) Si scriva l'espressione per lo spostamento al second'ordine in  $\epsilon$  del livello energetico fondamentale.

[10 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{J}_{\pm} |j, m\rangle = \hbar \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica Quantistica

19 Giugno 2013

### Esercizio 1

Sia consideri una particella di spin 1 soggetta all'hamiltoniana

$$H_0 = A\vec{S}^2 + B\hbar S_z,$$

essendo  $\vec{S}^2$  il quadrato dello spin e  $S_z$  la sua componente  $z$ .

1) Si scriva la matrice rappresentativa di  $H_0$ .

2) L'Hamiltoniana  $H_0$  sia perturbata da un termine proporzionale alla componente  $x$  dello spin: la nuova hamiltoniana sia quindi

$$H = H_0 + \epsilon C S_x$$

dove  $C$  è una costante e  $\epsilon \ll 1$ . Si determini lo spostamento dei livelli energetici al primo e al secondo ordine in  $\epsilon$ .

[10 punti]

### Esercizio 2

Tra tutti gli stati di un oscillatore armonico unidimensionale si determini lo stato in cui

- una misura dell'energia può dare il valore  $\frac{\hbar\omega}{2}$  con probabilità  $1/2$  e il valore  $\frac{3\hbar\omega}{2}$  con probabilità  $1/2$

- il valore della dispersione  $\Delta x^2$  dell'operatore coordinata assume il valore massimo possibile.

Verificare che sullo stato determinato è valido il principio di indeterminazione di Heisenberg.

Determinare, infine, l'evoluto temporale al tempo  $t$  dello stato costruito.

[11 punti]

### Esercizio 3

Una particella di spin 1 e una di spin  $1/2$  interagiscono con l'hamiltoniana

$$H = A\vec{L} \cdot \vec{S},$$

dove  $\vec{L} = (L^x, L^y, L^z)$  indica gli operatori di spin 1 e  $\vec{S} = (S^x, S^y, S^z)$  gli operatori di spin  $1/2$ . Se al tempo  $t = 0$  il sistema si trova nello stato

$$|L^z = 0\rangle |S^z = \hbar/2\rangle,$$

trovare lo stato al tempo  $t$ .

[9 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica Quantistica

12 Aprile 2013

### Esercizio 1

Tra tutti gli stati di un oscillatore armonico unidimensionale di frequenza  $\omega$  si determini lo stato in cui:

- 1) la misura dell'energia può dare il valore  $\frac{\hbar\omega}{2}$  con probabilità  $1/3$  e il valore  $\frac{3\hbar\omega}{2}$  con probabilità  $2/3$
- 2) compatibilmente con la richiesta di cui al punto 1) il valor medio della posizione assume il valore massimo possibile.

Si scriva infine l'evoluto temporale dello stato trovato al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin  $1/2$  interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = aS_1^x S_2^x,$$

essendo  $S_1^x, S_2^x$  rispettivamente gli operatori relativi alla componente  $x$  dello spin della prima particella e alla componente  $x$  dello spin della seconda particella ed essendo  $a$  una costante positiva.

- a) Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana (suggerimento: usare la base che diagonalizza simultaneamente gli operatori  $S_1^z, S_2^z$ ).
- b) Se a  $t = 0$  il sistema si trova nell'autoket simultaneo di  $S_1^z$  all'autovalore  $\frac{\hbar}{2}$  e di  $S_2^z$  all'autovalore  $\frac{\hbar}{2}$ , trovare lo stato del sistema al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Sia data l'hamiltoniana in rappresentazione matriciale:

$$H = A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

essendo  $A$  una costante con le dimensioni di un'energia. Si trovino autovalori e autovettori di  $H$ .

L'Hamiltoniana  $H$  sia perturbata dal potenziale  $V$ :

$$V = A \begin{pmatrix} 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

essendo  $\epsilon \ll 1$ . Si determinino gli spostamenti dei livelli energetici al primo e al secondo ordine in  $\epsilon$ .

[10 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica Quantistica

22 Febbraio 2013

### Esercizio 1

Un oscillatore armonico unidimensionale di massa  $m$  e frequenza  $\omega$  sia perturbato dal termine

$$V = V_0 \epsilon (\hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x}), \quad \epsilon \ll 1.$$

Si scrivano le correzioni ai livelli energetici imperturbati al primo e al secondo ordine in  $\epsilon$ .

[10 punti]

### Esercizio 2

Si considerino due particelle distinguibili di spin  $1/2$  interagenti con l'hamiltoniana

$$H = -A \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + B(S_1^x + S_2^x)^2.$$

Trovare autovalori e autovettori dell'hamiltoniana. Se la tempo  $t = 0$  il sistema si trova nello stato  $|+\rangle|-\rangle$  ( $S^z|\pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$ ) trovare lo stato al tempo  $t$ .

[10 punti]

### Esercizio 3

Sia data un'Hamiltoniana in tre dimensioni

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(|\vec{x}|).$$

- 1) Si calcoli il commutatore  $[\vec{x} \cdot \vec{p}, H]$ .
- 2) Si usi il risultato di cui al punto 1) per dimostrare che

$$\langle \psi_E | \frac{\vec{p}^2}{m} | \psi_E \rangle = \langle \psi_E | \vec{x} \cdot \vec{\nabla} V | \psi_E \rangle \quad (0.1)$$

essendo  $|\psi_E\rangle$  autoket dell'Hamiltoniana  $H$ .

- 3) Si verifichi la giustezza della relazione (0.1) per lo stato fondamentale dell'atomo di idrogeno. Formula utile:

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}}, \quad r = |\vec{x}|, \quad a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}$$

[10 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica Quantistica

13 Febbraio 2013

### Esercizio 1

Sia dato un oscillatore armonico unidimensionale e si consideri lo stato

$$|\psi\rangle_\alpha = e^{\frac{i\hat{p}\alpha}{\hbar}} |0\rangle.$$

1) Si scrivano la funzione d'onda relativa allo stato  $|\psi\rangle_\alpha$  nella rappresentazione delle coordinate e degli impulsi.

2) Si dimostri che la relazione di indeterminazione  $\Delta\hat{x}^2\Delta\hat{p}^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$  è soddisfatta.

3) Si calcoli la quantità:

$$\langle 0 | e^{\frac{i\hat{p}\alpha}{\hbar}} | 0 \rangle.$$

3) Si valutino i coefficienti

$$c_n = \langle n | \psi \rangle_\alpha$$

essendo  $|n\rangle$  autoket dell'Hamiltoniana. Si verifichi la relazione  $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 = 1$ .

[12 punti]

### Esercizio 2

Si considerino due particelle distinguibili di spin 1/2 interagenti con l'hamiltoniana

$$H_0 = -A\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

Tale hamiltoniana sia perturbata da un potenziale

$$V = \varepsilon A\hbar S_x, \quad \varepsilon \ll 1,$$

essendo  $S_x$  la componente  $x$  dello spin totale  $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ . Si scrivano le energie del sistema al prim'ordine in  $\varepsilon$  e si confronti tale risultato con il risultato esatto.

[9 punti]

### Esercizio 3

Si considerino due particelle identiche di spin 1/2 in una buca di potenziale infinita di larghezza  $a$ . Si scriva la funzione d'onda completa (funzione delle coordinate e funzione di spin) degli stati fondamentali nel caso in cui lo spin totale delle due particelle sia  $2\hbar^2$  e nel caso in cui lo spin totale delle due particelle sia zero. Si scrivano anche i corrispondenti valori dell'energia del sistema delle due particelle. Si considerino ora  $N$  particelle identiche di spin 1/2 e si supponga che ciascuna di esse sia nello stato  $|+\rangle$ . Si scriva un'espressione dell'energia dello stato fondamentale. Si valuti tale energia nel limite  $N \rightarrow \infty$ .

[9 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_\pm |j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica Quantistica

21 Novembre 2012

### Esercizio 1

Tra tutti gli stati di un oscillatore armonico unidimensionale di frequenza  $\omega$  si determini lo stato in cui:

- 1) la misura dell'energia può dare il valore  $\frac{\hbar\omega}{2}$  con probabilità  $1/2$  e il valore  $\frac{3\hbar\omega}{2}$  con probabilità  $1/2$
- 2) compatibilmente con la richiesta di cui al punto 1) il valor medio della posizione assume il valore massimo possibile.

Si scriva infine l'evoluto temporale dello stato trovato al tempo  $t$ .

[9 punti]

### Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin  $1/2$  interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = aS_1^z S_2^x,$$

essendo  $S_1^z, S_2^x$  rispettivamente gli operatori relativi alla componente  $z$  dello spin della prima particella e alla componente  $x$  dello spin della seconda particella ed essendo  $a$  una costante positiva.

- a) Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana (suggerimento: usare la base che diagonalizza simultaneamente gli operatori  $S_1^z, S_2^z$ ).
- b) Se a  $t = 0$  il sistema si trova nell'autoket simultaneo di  $S_1^z$  all'autovalore  $\frac{\hbar}{2}$  e di  $S_2^z$  all'autovalore  $\frac{\hbar}{2}$ , trovare lo stato del sistema al tempo  $t$ .

[9 punti]

### Esercizio 3

Sia data l'hamiltoniana in rappresentazione matriciale:

$$H = A \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

essendo  $A$  una costante con le dimensioni di un'energia. Si trovino autovalori e autovettori di  $H$ .

L'Hamiltoniana  $H$  sia perturbata dal potenziale  $V$ :

$$V = A \begin{pmatrix} 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

essendo  $\epsilon \ll 1$ . Si determinino gli spostamenti dei livelli energetici al primo e al secondo ordine in  $\epsilon$ .

[12 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$



## Meccanica Quantistica

4 Settembre 2012

### Esercizio 1

Sia dato un oscillatore armonico bidimensionale:

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2).$$

- 1) Si determini lo spettro energetico e la degenerazione dei livelli. Si perturbi l'hamiltoniana  $\hat{H}_0$  con un potenziale proporzionale all'operatore  $\hat{x}\hat{y}$ :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \epsilon\lambda\hat{x}\hat{y},$$

essendo  $\lambda$  una costante finita e  $\epsilon \ll 1$ .

- 2) Trovare lo spostamento fino al second'ordine in  $\epsilon$  del livello energetico fondamentale.
- 3) Trovare lo spostamento al prim'ordine in  $\epsilon$  del primo livello eccitato.

[12 punti]

### Esercizio 2

Sia data una buca di potenziale infinita di larghezza  $a$ . Si consideri la funzione d'onda

$$\psi(x) = A \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a}.$$

- 1) Si determini la costante di normalizzazione  $A$ .
- 2) Quali valori di energia si possono ottenere nello stato descritto da  $\psi(x)$  e con quali probabilità si presentano?
- 3) Si scriva l'evoluta temporale al tempo  $t$  della funzione  $\psi(x)$ .

[9 punti]

### Esercizio 3

Si considerino due particelle distinguibili di spin  $1/2$ . Si indichino con  $\vec{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$  e  $\vec{S}_2 = (S_2^x, S_2^y, S_2^z)$  gli operatori di spin delle due particelle e con  $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$  il loro spin totale  $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ . Si supponga che esse si trovino nell'autostato simultaneo di  $\vec{S}^2$  e di  $S_z$  agli autovalori  $2\hbar^2$  e  $0$  rispettivamente: trovare su questo stato i valori medi di  $S_1^x S_2^x$ ,  $S_1^y S_2^y$  e  $S_1^z S_2^z$ .

[9 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_\pm |j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica Quantistica

10 Luglio 2012

### Esercizio 1

Sia data una buca di potenziale infinita unidimensionale:

$$V(x) = 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < a, \quad V(x) = +\infty \quad \text{altrove.}$$

Al tempo  $t = 0$  il sistema sia descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = Ax \quad \text{per} \quad 0 < x < \frac{a}{2}, \quad \psi(x) = A(a-x) \quad \text{per} \quad \frac{a}{2} < x < a,$$

essendo  $A$  una costante positiva.

- 1) Trovare la costante  $A$ .
- 2) Se si misura l'energia sullo stato descritto da  $\psi(x)$ , quali valori si possono ottenere e con quali probabilità?
- 3) Trovare il valor medio dell'osservabile posizione nello stato descritto da  $\psi(x)$ .
- 4) Si faccia evolvere nel tempo lo stato. Si calcoli quindi il valor medio dell'osservabile posizione al tempo  $t$ .

[12 punti]

### Esercizio 2

Sia dato un oscillatore armonico unidimensionale la cui hamiltoniana sia perturbata da un termine  $\lambda\epsilon\hat{x}^3$ , essendo  $\epsilon \ll 1$ :

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \lambda\epsilon\hat{x}^3.$$

Si determini lo spostamento al primo e al second'ordine in  $\epsilon$  del livello energetico fondamentale.

[8 punti]

### Esercizio 3

Si considerino due particelle distinguibili di spin 1/2 interagenti attraverso l'hamiltoniana:

$$H = A \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + B(S_1^y S_2^y + S_1^z S_2^z),$$

dove  $A$  e  $B$  sono costanti e  $\vec{S}_1, \vec{S}_2$  indicano rispettivamente gli operatori di spin della prima e della seconda particella.

- 1) Si trovino autovalori e autoket dell'hamiltoniana.
- 2) Se al tempo  $t = 0$  il sistema si trova nello stato  $|-\rangle|-\rangle$ , trovare lo stato al tempo  $t$ .
- 3) Se al tempo  $t = 0$  il sistema si trova nello stato  $|-\rangle|-\rangle$ , trovare il valor medio di  $S_1^z$  al tempo  $t$ .

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_\pm |j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

## Meccanica Quantistica

14 Febbraio 2012

### Esercizio 1

Sia data una buca di potenziale infinita unidimensionale:

$$V(x) = 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < a, \quad V(x) = +\infty \quad \text{altrove.}$$

Al tempo  $t = 0$  il sistema sia descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A \quad \text{per} \quad -\epsilon < x < \epsilon, \quad 0 < \epsilon < a, \quad \psi(x) = 0 \quad \text{altrove.}$$

- 1) Trovare la costante  $A$  in funzione del parametro  $\epsilon$ .
- 2) Se si misura l'energia sullo stato descritto da  $\psi(x)$ , quali valori si possono ottenere e con quali probabilità?
- 3) Si scriva la funzione d'onda al tempo  $t$ .
- 4) Si calcoli il valor medio dell'osservabile posizione al tempo  $t$ .

[12 punti]

### Esercizio 2

Sia dato un oscillatore armonico unidimensionale la cui hamiltoniana sia perturbata da un termine  $\lambda\epsilon\hat{x}^4$ , essendo  $\epsilon \ll 1$ :

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \lambda\epsilon\hat{x}^4.$$

Si determini lo spostamento al prim'ordine in  $\epsilon$  del livello energetico  $n$ -esimo.

[8 punti]

### Esercizio 3

Si considerino due particelle distinguibili di spin  $1/2$  interagenti attraverso l'hamiltoniana:

$$H = A \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + B S_1^x S_2^x,$$

dove  $A$  e  $B$  sono costanti e  $\vec{S}_1, \vec{S}_2$  indicano rispettivamente gli operatori di spin della prima e della seconda particella.

- 1) Si trovino autovalori e autoket dell'hamiltoniana.
- 2) Se al tempo  $t = 0$  il sistema si trova nello stato  $|+\rangle|+\rangle$ , trovare lo stato al tempo  $t$ .
- 3) Se al tempo  $t = 0$  il sistema si trova nello stato  $|+\rangle|+\rangle$ , trovare il valor medio di  $S_1^z$  al tempo  $t$ .

[10 punti]

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$$