**Meccanica Quantistica 2010-2011**
14 Febbraio 2012

**Esercizio 1**

Sia dato un oscillatore armonico unidimensionale di massa $m$ e pulsazione $\omega$. Si consideri lo stato:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + \alpha|1\rangle\right), \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Si determini $\alpha$ usando la condizione di normalizzazione e sapendo che

$$\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{8m\omega}}.$$

Si calcolino poi le dispersioni $\Delta\hat{x}^2$ e $\Delta\hat{p}^2$ e si verifichi il principio di indeterminazione.

**[10 punti]**

**Esercizio 2**

Due particelle distinguibili di spin 1/2 interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = aS_1^y S_2^z,$$

essendo $S_1^y$, $S_2^z$ rispettivamente gli operatori relativi alla componente $y$ dello spin della prima particella e alla componente $z$ dello spin della seconda particella ed essendo $a$ una costante positiva.
a) Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana (suggerimento: usare la base che diagonalizza simultaneamente gli operatori $S_1^z$, $S_2^z$).
b) Se a $t = 0$ il sistema si trova nell'autoket simultaneo di $S_1^z$ all'autovalore $\frac{\hbar}{2}$ e di $S_2^z$ all'autovalore $\frac{\hbar}{2}$, trovare lo stato del sistema al tempo $t$.

**[10 punti]**

**Esercizio 3**

Si consideri una buca di potenziale infinita unidimensionale di larghezza $a$ (ossia il potenziale è zero per $0 < x < a$ e infinito altrove). Il sistema sia perturbato da un potenziale della forma

$$V(x) = \epsilon A, \quad 0 < x < \frac{a}{2}, \quad V(x) = 0, \quad \frac{a}{2} < x < a, \quad \epsilon \ll 1.$$

1) Si determini lo spostamento al primo ordine in $\epsilon$ del livello energetico $n$-esimo.
2) Si scriva l'espressione per lo spostamento al secondo ordine in $\epsilon$ del livello energetico fondamentale.

**[10 punti]**

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)), \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

**Meccanica Quantistica**
16 Gennaio 2012

## Esercizio 1

In uno spazio vettoriale a tre dimensioni sia definita la base ortonormale costituita dai ket $|i\rangle$ $(i = 1, 2, 3)$. Si definiscano gli operatori $\hat{A} = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 3|$ e $\hat{B} = |2\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 2|$.

**a):** Trovare quale/i relazione/i debba/debbano intercorrere tra i coefficienti $\alpha$ e $\beta$ perché l'operatore $\hat{C}[\alpha;\beta] = \alpha\hat{A}+\beta\hat{B}$ possa corrispondere ad una quantità osservabile [**N.B.:** si determino $\alpha$ e $\beta$ in modo che $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, prima assumendo $\alpha$ reale, successivamente assumendo $\alpha$ immaginario puro: in questo modo vengono determinate due osservabili indipendenti];

**b):** Scelti $\alpha$ e $\beta$ come nei due casi elencati al punto **a):**, trovare autovalori ed autoket di $\hat{C}[\alpha;\beta]$ in ciascun caso;

**c):** Verificare se le due osservabili indipendenti determinate al punto **a):** sono compatibili.

**[10 punti]**

## Esercizio 2

Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale di massa $m$ e pulsazione $\omega$.

Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) ,$$

essendo $|n\rangle$ autoket dell'hamiltoniana: $\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega(n + 1/2)|n\rangle$.

a) Si calcolino i valori medi di posizione e impulso nello stato $|\psi_0\rangle$.

b) Si calcolino i valori medi di posizione e impulso al tempo $t$ usando lo schema di Schroedinger.

c) Facoltativo: Si calcolino i valori medi di posizione e impulso al tempo $t$ usando lo schema di Heisenberg.

**[10 punti]**

## Esercizio 3

Due particelle distinguibili di spin 1/2 interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = aS_1^x S_2^z , \quad a > 0 ,$$

essendo $S_1^x$ l'operatore relativo alla componente $x$ dello spin della prima particella e $S_2^z$ l'operatore relativo alla componente $z$ dello spin della seconda particella.

a) Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

b) Se a $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|+\rangle|-\rangle$, essendo $S^z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$, trovare lo stato del sistema al tempo $t$.

Suggerimento: lavorare nella base in cui si diagonalizzano simultaneamente $S_1^z$ e $S_2^z$.

**[10 punti]**

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))$$

**Meccanica Quantistica**
16 Gennaio 2012

### Esercizio 1

Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale di massa $m$ e pulsazione $\omega$.
Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + |1\rangle\right) \,,$$

essendo $|n\rangle$ autoket dell'hamiltoniana: $\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega(n + 1/2)|n\rangle$.

a) Si calcolino i valori medi di posizione e impulso nello stato $|\psi_0\rangle$.

b) Si calcolino i valori medi di posizione e impulso al tempo $t$ usando lo schema di Schroedinger.

c) Facoltativo: Si calcolino i valori medi di posizione e impulso al tempo $t$ usando lo schema di Heisenberg.

**[10 punti]**

### Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin 1/2 interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = a S_1^x S_2^z \,, \quad a > 0 \,,$$

essendo $S_1^x$ l'operatore relativo alla componente $x$ dello spin della prima particella e $S_2^z$ l'operatore relativo alla componente $z$ dello spin della seconda particella.
a) Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.
b) Se a $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|+\rangle|-\rangle$, essendo $S^z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$, trovare lo stato del sistema al tempo $t$.

Suggerimento: lavorare nella base in cui si diagonalizzano simultaneamente $S_1^z$ e $S_2^z$.

**[10 punti]**

### Esercizio 3

Si consideri una buca di potenziale infinita di larghezza $a$, ossia una particella di massa $m$ soggetta ad un potenziale

$$V(x) = 0 \quad \text{per} \quad 0 \le x \le a \,, \quad V(x) = +\infty \quad \text{per} \quad x < 0 \text{ e } x > a \,.$$

Il sistema sia perturbato da un potenziale della forma

$$W(x) = \epsilon\, A\, \delta\left(x - \frac{a}{2}\right) \,,$$

essendo $A$ una costante e $\epsilon \ll 1$. Si determini:
a) Lo spostamento al primo ordine in $\epsilon$ del livello energetico $n$-esimo.
b) Lo spostamento al secondo ordine in $\epsilon$ del livello fondamentale.

**[10 punti]**

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega)) \,, \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{n\pi x}{a}$$

**Meccanica Quantistica**
18 Novembre 2011

**Esercizio 1**

In uno spazio vettoriale a due dimensioni sia definita la base ortonormale costituita dai ket $|i\rangle$ $(i = 1, 2)$. Si definiscano gli operatori $\hat{A} = |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|$ e $\hat{B} = i\{|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|\ \}$.

a) Calcolare il commutatore $[\hat{A}, \hat{B}]$. Quale conclusione si può trarre dal risultato?

b) Trovare autovalori ed autoket di $\hat{A}$ e $\hat{B}$;

c) Alla luce della risposta al punto b), verificare la correttezza della risposta data al punto a).

**[10 punti]**

**Esercizio 2**

Sia dato un oscillatore armonico unidimensionale e si consideri lo stato al tempo $t = 0$:

$$|\psi_0\rangle = e^{\frac{ia\hat{p}}{\hbar}}|0\rangle\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

a) Si calcolino i valori medi:

$$\langle\psi_0|\hat{x}|\psi_0\rangle\,, \quad \langle\psi_0|\hat{p}|\psi_0\rangle\,.$$

b) Si calcolino i valori medi della posizione e dell'impulso al tempo $t$ usando lo schema di Heisenberg.

c) Al tempo $t = 0$ si verifichi il principio di indeterminazione.

**[10 punti]**

**Esercizio 3**

Due particelle distinguibili di spin 1/2 interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = aS_1^x S_2^x\,,$$

essendo $S_1^x$, $S_2^x$ gli operatori relativi alle componenti $x$ dello spin rispettivamente della prima e della seconda particella ed essendo $a$ una costante positiva.

a) Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana (suggerimento: usare la base che diagonalizza simultaneamente gli operatori $S_1^z$, $S_2^z$).

b) Se a $t = 0$ il sistema si trova nell'autoket simultaneo di $S_1^z$ all'autovalore $\frac{\hbar}{2}$ e di $S_2^z$ all'autovalore $\frac{\hbar}{2}$, trovare lo stato del sistema al tempo $t$.

**[10 punti]**

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \hat{J}_\pm|\,j, m >= \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|\,j, m \pm 1 >$$

**Meccanica Quantistica**
18 Novembre 2011

**Esercizio 1**

Sia dato un oscillatore armonico unidimensionale e si consideri lo stato al tempo $t = 0$:

$$|\psi_0\rangle = e^{\frac{ia\hat{p}}{\hbar}}|0\rangle\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

a) Si calcolino i valori medi:

$$\langle\psi_0|\hat{x}|\psi_0\rangle\,, \quad \langle\psi_0|\hat{p}|\psi_0\rangle\,.$$

b) Si calcolino i valori medi della posizione e dell'impulso al tempo $t$ usando lo schema di Heisenberg.
c) Al tempo $t = 0$ si verifichi il principio di indeterminazione.

**[10 punti]**

**Esercizio 2**

Due particelle distinguibili di spin 1/2 interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = aS_1^x S_2^x\,,$$

essendo $S_1^x$, $S_2^x$ gli operatori relativi alle componenti $x$ dello spin rispettivamente della prima e della seconda particella ed essendo $a$ una costante positiva.
a) Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana (suggerimento: usare la base che diagonalizza simultaneamente gli operatori $S_1^z$, $S_2^z$).
b) Se a $t = 0$ il sistema si trova nell'autoket simultaneo di $S_1^z$ all'autovalore $\frac{\hbar}{2}$ e di $S_2^z$ all'autovalore $\frac{\hbar}{2}$, trovare lo stato del sistema al tempo $t$.

**[10 punti]**

**Esercizio 3**

Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale di massa $m$ e pulsazione $\omega$. Il sistema sia perturbato da un potenziale della forma

$$V(x) = \epsilon(x + \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}x^2)\,,$$

essendo $\epsilon$ una costante 'piccola'. Si determini:
a) Lo spostamento al primo ordine in $\epsilon$ del livello energetico $n$-esimo
b) Lo spostamento al secondo ordine in $\epsilon$ del livello energetico $n$-esimo

**[10 punti]**

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \hat{J}_\pm|\,j, m >= \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|\,j, m \pm 1 >$$

# Meccanica Quantistica - Studenti anni precedenti

## 16 settembre 2011

### Esercizio 1

In uno spazio vettoriale a tre dimensioni sia definita la base ortonormale costituita dai ket $|i\rangle$ $(i = 1, 2, 3)$.
Si definiscano gli operatori $\hat{O}_1 = |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|$ e $\hat{B} = i\{|1\rangle\langle 3| - |3\rangle\langle 1|\}$.
**a):** Calcolare in commutatore $[\hat{O}_1, \hat{O}_2]$;
**b):** Trovare autovalori ed autoket di $\hat{O}_1$ e $\hat{O}_2$;
**c):** Scrivere $\hat{O}_1$ nella base di autoket di $\hat{O}_2$. È il risultato coerente con la risposta data al punto **a)**:?.

**[10 punti]**

### Esercizio 2

Sia data una particella di spin 1/2 e si consideri l'operatore $\vec{S} \cdot \vec{n}$, essendo $\vec{S}$ l'operatore di spin e $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ un versore.

a) Trovare gli elementi di matrice di $\vec{S} \cdot \vec{n}$ nella base che diagonalizza $S_z$.

Si considerino poi due particelle distinguibili di spin 1/2 e si supponga che siano nello stato (singoletto) $|\psi_s\rangle$ in cui il loro spin totale è zero.

b) Dimostrare che:

$$\langle \psi_s | (\vec{S}_1 \cdot \vec{n}_1)(\vec{S}_2 \cdot \vec{n}_2) | \psi_s \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \tag{1}$$

**[10 punti]**

### Esercizio 3

Considerare i quattro operatori:

$$q_1 = \frac{x + \frac{a^2}{\hbar} p_y}{\sqrt{2}}, \quad p_1 = \frac{p_x - \frac{\hbar}{a^2} y}{\sqrt{2}}, \quad q_2 = \frac{x - \frac{a^2}{\hbar} p_y}{\sqrt{2}}, \quad p_2 = \frac{p_x + \frac{\hbar}{a^2} y}{\sqrt{2}} \tag{2}$$

essendo $a$ una costante reale.
a) Trovare e commentare le regole di commutazione $[q_i, q_j], [p_i, p_j], [q_i, p_j]$.
b) Dimostrare che la componente $z$ del momento angolare orbitale si scrive

$$L_z = \frac{a^2}{2\hbar}(p_1^2 - p_2^2) + \frac{\hbar}{2a^2}(q_1^2 - q_2^2) \tag{3}$$

c) Ricordando la forma degli autovalori dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico, dimostrare, usando il risultato del punto b), che gli autovalori di $L_z$ sono pari a $\hbar m$, con $m$ intero.

**[10 punti]**

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{J}_\pm | j, m >= \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} | j, m \pm 1 > \tag{4}$$

**Meccanica Quantistica**
16 Settembre 2011

**Esercizio 1**

Sia data una particella di spin 1/2 e si consideri l'operatore $\vec{S} \cdot \vec{n}$, essendo $\vec{S}$ l'operatore di spin e $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ un versore.

a) Trovare gli elementi di matrice di $\vec{S} \cdot \vec{n}$ nella base che diagonalizza $S_z$.

Si considerino poi due particelle distinguibili di spin 1/2 e si supponga che siano nello stato (singoletto) $|\psi_s\rangle$ in cui il loro spin totale è zero.

b) Dimostrare che:

$$\langle\psi_s|(\vec{S}_1 \cdot \vec{n}_1)(\vec{S}_2 \cdot \vec{n}_2)|\psi_s\rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$$

**[10 punti]**

**Esercizio 2**

Considerare i quattro operatori:

$$q_1 = \frac{x + \frac{a^2}{\hbar}p_y}{\sqrt{2}}, \quad p_1 = \frac{p_x - \frac{\hbar}{a^2}y}{\sqrt{2}}, \quad q_2 = \frac{x - \frac{a^2}{\hbar}p_y}{\sqrt{2}}, \quad p_2 = \frac{p_x + \frac{\hbar}{a^2}y}{\sqrt{2}}$$

essendo $a$ una costante reale.

a) Trovare e commentare le regole di commutazione $[q_i, q_j], [p_i, p_j], [q_i, p_j]$.

b) Dimostrare che la componente $z$ del momento angolare orbitale si scrive

$$L_z = \frac{a^2}{2\hbar}(p_1^2 - p_2^2) + \frac{\hbar}{2a^2}(q_1^2 - q_2^2)$$

c) Ricordando la forma degli autovalori dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico, dimostrare, usando il risultato del punto b), che gli autovalori di $L_z$ sono pari a $\hbar m$, con $m$ intero.

**[10 punti]**

**Esercizio 3**

Si consideri una buca di potenziale infinita rettangolare: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$. Il sistema sia perturbato da un potenziale della forma

$$V(x,y) = \epsilon \quad \text{per} \quad 0 < x < \frac{a}{2}, \quad 0 < y < \frac{b}{2}; \quad V(x,y) = 0 \quad \text{altrove},$$

essendo $\epsilon$ una costante 'piccola'. Si determini:

a) Lo spostamento al prim'ordine in $\epsilon$ del livello energetico fondamentale

b) Gli spostamenti al prim'ordine in $\epsilon$ del primo livello eccitato.

**[10 punti]**

Formule utili:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}, \quad \hat{J}_\pm|\,j,m>= \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|\,j,m \pm 1>$$

# Meccanica Quantistica
# I prova di recupero

## 14 luglio 2011

1. In uno spazio vettoriale a tre dimensioni sia definita la base ortonormale costituita dai ket $|i\rangle$ $(i = 1, 2, 3)$. Si definiscano gli operatori $\hat{A} = |1\rangle\langle 1| - |3\rangle\langle 3|$ e $\hat{B} = |1\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1|$.

   **a):** Calcolare il commutatore $[\hat{A}, \hat{B}]$. Quale conclusione si può trarre dal risultato?;

   **b):** Trovare autovalori ed autoket di $\hat{A}$ e $\hat{B}$;

   **c):** Alla luce della risposta al punto **b**), verificare la correttezza della risposta data al punto **a**).

   **[10 punti]**

2. Scrivere le regole di commutazione, $[\hat{L}_i, \hat{x}_j]$, $[\hat{L}_i, \hat{p}_j]$, tra le tre componenti del momento angolare orbitale $\vec{L} = \vec{x} \wedge \vec{p}$ e le tre componenti dell'operatore coordinata $\vec{x}$ e dell'operatore impulso $\vec{p}$. Usare questi dati per calcolare i commutatori

$$[\hat{L}_3\, , \, \vec{x} \cdot \vec{p}\,]\, , \quad [\hat{L}_3\, , \, \vec{x}^{\,2}\,]\, , \quad [\hat{L}_3\, , \, \vec{p}^{\,2}\,] \tag{1}$$

   e giustificare sulla base di considerazioni fisiche i risultati ottenuti.

   **[10 punti]**

3. Due particelle distinguibili di spin 1/2 interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = a\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + b\hbar S_1^z\, , \tag{2}$$

   essendo $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ gli operatori di spin rispettivamente della prima e della seconda particella ed essendo $a$, $b$ due costanti positive.

   a) Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

   b) Se a $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|\ S_1^z = \frac{\hbar}{2}\rangle \otimes |\ S_2^z = \frac{\hbar}{2}\rangle$, trovare lo stato del sistema al tempo $t$.

   c) Facoltativo: In riferimento al punto a), discutere il limite $b \to 0$.

   **[10 punti]**

Formule utili:

$$\hat{J}_{\pm}|\, j, m >= \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|\, j, m \pm 1 > \tag{3}$$

**Meccanica Quantistica**
14 Luglio 2011

**Esercizio 1**

Scrivere le regole di commutazione, $[\hat{L}_i, \hat{x}_j]$, $[\hat{L}_i, \hat{p}_j]$, tra le tre componenti del momento angolare orbitale $\vec{L} = \vec{x} \wedge \vec{p}$ e le tre componenti dell'operatore coordinata $\vec{x}$ e dell'operatore impulso $\vec{p}$. Usare questi dati per calcolare i commutatori

$$[\hat{L}_3\,,\,\vec{x}\cdot\vec{p}\,]\,, \quad [\hat{L}_3\,,\,\vec{x}^{\,2}\,]\,, \quad [\hat{L}_3\,,\,\vec{p}^{\,2}\,]$$

e giustificare sulla base di considerazioni fisiche i risultati ottenuti.

**[10 punti]**

**Esercizio 2**

Due particelle distinguibili di spin 1/2 interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = a\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + b\hbar S_1^z\,,$$

essendo $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ gli operatori di spin rispettivamente della prima e della seconda particella ed essendo $a$, $b$ due costanti positive.

a) Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

b) Se a $t = 0$ il sistema si trova nello stato $\mid S_1^z = \frac{\hbar}{2}\rangle \otimes \mid S_2^z = \frac{\hbar}{2}\rangle$, trovare lo stato del sistema al tempo $t$.

c) Facoltativo: In riferimento al punto a), discutere il limite $b \to 0$.

**[10 punti]**

**Esercizio 3**

Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale di massa $m$ e frequenza $\omega$. La sua hamiltoniana sia perturbata da un potenziale della forma $V = \lambda\hat{x}$, essendo $\lambda$ una costante 'piccola'. Si determini:

a) Lo spostamento al primo ordine in $\lambda$ del livello energetico $n$-esimo

b) Lo spostamento al secondo ordine in $\lambda$ del livello energetico $n$-esimo

L'Hamiltoniana totale del sistema (oscillatore armonico più perturbazione $V$) può essere diagonalizzata esattamente. Giustificare quindi i risultati trovati in a), b) sulla base della diagonalizzazione esatta dell'Hamiltoniana totale.

**[10 punti]**

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \hat{J}_\pm |\, j, m >= \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|\, j, m \pm 1 >$$

**Meccanica Quantistica**
**Programma del corso relativo agli AA.AA. 2009-10 e precedenti**
7 Aprile 2011

## Esercizio 1

Una particella quantistica di massa $m$ in una dimensione, soggetta ad una forza costante $F$, è preparata al tempo $t = 0$ nello stato $|\Psi_0\rangle$ con corrispondente funzione d'onda $\langle x|\Psi_0\rangle = \Psi_0(x) = ce^{-Ax^2}$, con $A$ costante complessa

**a):** Dire come deve essere $A$ perché la funzione d'onda sia normalizzabile. Successivamente, trovare la corretta costante di normalizzazione ($c$);

**b):** Calcolare, al tempo $t$, il valor medio di $\hat{x}$ e di $\hat{p}$, $\langle\hat{x}\rangle_t$, $\langle\hat{p}\rangle_t$;

**c):** Calcolare, al tempo $t$, il valor medio dell'energia sullo stato $|\Psi(t)\rangle$.

**Facoltativo**: Calcolare, al tempo $t$, il valor medio di $\hat{x}^2$ e di $\hat{p}^2$, $\langle\hat{x}^2\rangle_t$, $\langle\hat{p}^2\rangle_t$, ed usare il risultato ottenuto per verificare il principio di indeterminazione, $\langle\Delta\hat{x}^2\rangle_t \, \langle\Delta\hat{p}^2\rangle_t \geq \frac{\hbar^2}{4}$.

**[10 punti]**

## Esercizio 2

Scrivere le regole di commutazione $[\hat{L}_i, \hat{p}_j]$ tra le tre componenti del momento angolare orbitale $\vec{L} = \vec{x} \wedge \vec{p}$ e le tre componenti dell'operatore impulso $\vec{p}$. Usare questo dato per scrivere l'operatore

$$\hat{p}_i(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{\hbar}\hat{L}_3}\hat{p}_i e^{i\frac{\theta}{\hbar}\hat{L}_3}\,, \quad i = 1, 2, 3,$$

in termini di $\hat{p}_i$ e di $\theta$.

Dato infine il ket $|\,\vec{p}\rangle$ tale che $\hat{p}_i\,|\,\vec{p}\rangle = p_i\,|\,\vec{p}\rangle$, far vedere che il ket 'ruotato':

$$e^{i\frac{\theta}{\hbar}\hat{L}_3}\,|\,\vec{p}\rangle$$

è ancora autoket dell'operatore impulso $\vec{p}$ e scriverne i relativi autovalori.

**[10 punti]**

## Esercizio 3

Due particelle distinguibili di spin 1/2 interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = a\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + b(S_1^z)^2 + c\hbar S_1^z$$

essendo $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ gli operatori di spin rispettivamente della prima e della seconda particella ed essendo $a$, $b$, $c$ tre costanti positive.

a) Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

b) Se a $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|\,S_1^z = \frac{\hbar}{2}\rangle \otimes |\,S_2^z = -\frac{\hbar}{2}\rangle$, trovare lo stato del sistema al tempo $t$ nel caso in cui $c = 0$.

c) Facoltativo: Rispondere alla domanda b) nel caso generale in cui $c \neq 0$.

**[10 punti]**

Formule utili:

$$\hat{J}_\pm|\,j,m>= \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|\,j,m \pm 1>$$

**Meccanica Quantistica**
**Programma del corso relativo all'A.A. 2010-11**
7 Aprile 2011

### Esercizio 1

Scrivere le regole di commutazione $[\hat{L}_i, \hat{p}_j]$ tra le tre componenti del momento angolare orbitale $\vec{L} = \vec{x} \wedge \vec{p}$ e le tre componenti dell'operatore impulso $\vec{p}$. Usare questo dato per scrivere l'operatore

$$\hat{p}_i(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{\hbar}\hat{L}_3}\hat{p}_i e^{i\frac{\theta}{\hbar}\hat{L}_3}\,, \quad i = 1, 2, 3,$$

in termini di $\hat{p}_i$ e di $\theta$.

Dato infine il ket $\mid \vec{p}\rangle$ tale che $\hat{p}_i \mid \vec{p}\rangle = p_i \mid \vec{p}\rangle$, far vedere che il ket 'ruotato':

$$e^{i\frac{\theta}{\hbar}\hat{L}_3} \mid \vec{p}\rangle$$

è ancora autoket dell'operatore impulso $\vec{p}$ e scriverne i relativi autovalori.

**[10 punti]**

### Esercizio 2

Due particelle distinguibili di spin 1/2 interagiscono con l'Hamiltoniana

$$H = a\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + b(S_1^z)^2 + c\hbar S_1^z$$

essendo $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ gli operatori di spin rispettivamente della prima e della seconda particella ed essendo $a$, $b$, $c$ tre costanti positive.

a) Trovare autoket e autovalori dell'Hamiltoniana.

b) Se a $t = 0$ il sistema si trova nello stato $\mid S_1^z = \frac{\hbar}{2}\rangle \otimes \mid S_2^z = -\frac{\hbar}{2}\rangle$, trovare lo stato del sistema al tempo $t$ nel caso in cui $c = 0$.

c) Facoltativo: Rispondere alla domanda b) nel caso generale in cui $c \neq 0$.

**[10 punti]**

### Esercizio 3

Sia dato un sistema a due livelli la cui hamiltoniana in rappresentazione matriciale abbia la forma seguente:

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & \lambda\Delta \\ \lambda\Delta & E_2 \end{pmatrix}$$

in cui $\lambda$ è una costante adimensionale. Si supponga $\lambda \ll 1$.

a) Sia $E_1 \neq E_2$: trovare gli autovalori dell'Hamiltoniana al primo e secondo ordine in $\lambda$, usando la teoria delle perturbazioni. Se invece $E_1 = E_2$, trovare gli autovalori dell'Hamiltoniana al prim'ordine in $\lambda$.

b) Trovare gli autovalori esatti di $H$ e confrontarli con i valori approssimati di cui al punto a).

**[10 punti]**

Formule utili:

$$\hat{J}_\pm | j, m >= \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} | j, m \pm 1 >$$

# Prova scritta: appello straordinario
# Meccanica Quantistica

### 16 novembre 2010

1. La dinamica di una particella quantistica di massa $m$ sia descritta dall'Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - F\hat{x} \quad ,$$

con $F$ costante.

**a):** Trovare gli operatori coordinata ed impulso al tempo $t$ in rappresentazione di Heisenberg, $\hat{x}_H(t), \hat{p}_H(t)$, in termini degli operatori in rappresentazione di Schrödinger, $\hat{x}, \hat{p}$;

**b):** Assumendo che, al tempo $t = 0$, la particella sia stata creata nello stato $|\Psi_0\rangle$ con corrispondente funzione d'onda $\langle x|\Psi_0\rangle = \Psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}\sigma^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, con $\sigma$ costante reale e positiva, usare il risultato ottenuto al punto **b**) per trovare il valor medio di $\hat{x}$ e di $\hat{p}$ al tempo $t$;

**c):** Calcolare, al tempo $t$, il valor medio dell'energia sullo stato $|\Psi(t)\rangle$.

**[10 punti]**

2. Un oscillatore armonico di Hamiltoniana $\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$ sia stato preparato, al tempo $t = 0$, nello stato $|\Psi_0\rangle = A\hat{x}^2|0\rangle$, dove $\hat{x}$ è l'operatore coordinata e $A$ è una costante di normalizzazione:

**a)**: Determinare la corretta normalizzazione dello stato $|\Psi_0\rangle$ $(A)$, dopodiché calcolare il valor medio su di esso degli operatori $\hat{x}, \hat{p}$;

**b)**: Calcolare il valor medio, sullo stato $|\Psi_0\rangle$, degli operatori $\hat{x}^2, \hat{p}^2$. Successivamente, usare il risultato ottenuto per verificare che risulta soddisfatto il principio di indeterminazione

$\langle\Psi_0|(\Delta\hat{x})^2|\Psi_0\rangle \, \langle\Psi_0|(\Delta\hat{p})^2|\Psi_0\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$;

**c)**: Calcolare il valor medio dell'energia sullo stato $|\Psi_0\rangle$.

**Facoltativo**: Trovare lo stato del sistema al tempo $t$, $|\Psi_0(t)\rangle$.

**[10 punti]**

3. Due spin 1/2, $\vec{S}_1, \vec{S}_2$, interagiscono secondo l'Hamiltoniana $\hat{H} = A\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - BS_{1,z}S_{2,z}$, con $A, B$ costanti positive:

**a):** Trovare gli autovalori di $\hat{H}$ e scriverne i corrispondenti autoket come combinazioni dei prodotti di autoket simultanei di $(\vec{S}_1)^2, S_{1,z}$ e di $(\vec{S}_2)^2, S_{2,z}$, $|s_1, s_2\rangle$, con $s_1, s_2 = \pm\frac{1}{2}$ e $S_{1,z}|s_1, s_2\rangle = \hbar s_1|s_1, s_2\rangle$, $S_{2,z}|s_1, s_2\rangle = \hbar s_2|s_1, s_2\rangle$;

**b):** Supposto che il sistema sia stato preparato, al tempo $t = 0$, nello stato $|\Psi(0)\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, trovare lo stato del sistema al tempo $t$, $|\Psi(t)\rangle$;

**c):** Assumendo che lo stato iniziale sia stato fissato come al punto **b**, trovare il valor medio di $S_{1,z}$ al tempo $t$.

**[10 punti]**

**Formule utili:** $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right) \quad ; \quad \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2}[(\vec{S}_1 + \vec{S}_2) - (\vec{S}_1)^2 - (\vec{S}_2)^2]$.

# Seconda prova scritta: Meccanica Quantistica

## 16 Settembre 2010

1. Una particella quantistica di massa $m$, in moto in un campo gravitazionale uniforme con accelerazione pari a $g$, viene preparata al tempo $t = 0$ nello stato $|\Psi_0\rangle$ con corrispondente funzione d'onda $\langle x|\Psi_0\rangle = \Psi_0(x) = ce^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, con $\sigma$ costante reale e positiva:

   **a):** Trovare la corretta costante di normalizzazione ($c$);

   **b):** Calcolare, al tempo $t$, il valor medio di $\hat{x}$ e di $\hat{p}$, $\langle\hat{x}\rangle_t$, $\langle\hat{p}\rangle_t$;

   **c):** Calcolare, al tempo $t$, il valor medio dell'energia sullo stato $|\Psi(t)\rangle$.

   **Facoltativo**: Calcolare, al tempo $t$, il valor medio di $\hat{x}^2$ e di $\hat{p}^2$, $\langle\hat{x}^2\rangle_t$, $\langle\hat{p}^2\rangle_t$, ed usare il risultato ottenuto per verificare il principio di indeterminazione, $\langle\Delta\hat{x}^2\rangle_t \, \langle\Delta\hat{p}^2\rangle_t \geq \frac{\hbar^2}{4}$.

   **[10 punti]**

2. Un oscillatore armonico di Hamiltoniana $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ sia stato preparato, al tempo $t = 0$, nello stato $|\Psi_0\rangle = e^{i\frac{\hat{x}}{\lambda}}|0\rangle$, dove $\hat{x}$ è l'operatore coordinata e $\lambda$ è una costante con le dimensioni di una lunghezza:

   **a)**: Dire se $|\Psi_0\rangle$ è correttamente normalizzato. Se non lo è, determinarne la norma e, successivamente, calcolare il valor medio su di esso degli operatori $\hat{x}, \hat{p}$;

   **b)**: Calcolare il valor medio, sullo stato $|\Psi_0\rangle$, degli operatori $\hat{x}^2, \hat{p}^2$. Successivamente, usare il risultato ottenuto per verificare che risulta soddisfatto il principio di indeterminazione $\langle\Psi_0|(\Delta\hat{x})^2|\Psi_0\rangle \, \langle\Psi_0|(\Delta\hat{p})^2|\Psi_0\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$;

   **c)**: Calcolare il valor medio dell'energia sullo stato $|\Psi_0\rangle$.

   **Facoltativo**: Trovare lo stato del sistema al tempo $t$, $|\Psi_0(t)\rangle$.

   **[10 punti]**

3. Due spin 1/2, $\vec{S}_1, \vec{S}_2$, interagiscono secondo l'Hamiltoniana $\hat{H} = A[S_{1,x}S_{2,x} + S_{1,y}S_{2,y}] - BS_{1,z}S_{2,z}$, con $A, B$ costanti positive:

   **a):** Trovare gli autovalori di $\hat{H}$ e scriverne i corrispondenti autoket come combinazioni dei prodotti di autoket simultanei di $(\vec{S}_1)^2, S_{1,z}$ e di $(\vec{S}_2)^2, S_{2,z}$, $|s_1, s_2\rangle$, con $s_1, s_2 = \pm$ e $S_{1,z}|s_1, s_2\rangle = s_1\frac{\hbar}{2}|s_1, s_2\rangle$, $S_{2,z}|s_1, s_2\rangle = s_2\frac{\hbar}{2}|s_1, s_2\rangle$;

   **b):** Supposto che il sistema sia stato preparato, al tempo $t = 0$, nello stato $|\Psi(0)\rangle = |+, -\rangle$, trovare lo stato del sistema al tempo $t$, $|\Psi(t)\rangle$;

   **c):** Assumendo che il sistema sia stato inizializzato come al punto **b**, trovare il valor medio di $S_{1,z}$ e di $S_{2,z}$ al tempo $t$.

   **[10 punti]**

**Formule utili:** $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)$.

# Seconda prova scritta:
# Meccanica Quantistica

## 13 Luglio 2010

1. Una particella quantistica, la cui dinamica sia descritta dall'Hamiltoniana $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - F\hat{x}$ ($F$ costante), sia stata preparata, al tempo $t = 0$, nello stato $|\Psi_0\rangle$ corrispondente alla funzione d'onda $\langle x|\Psi_0\rangle = \Psi_0(x) = ce^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, con $\sigma$ costante reale e positiva:

   **a):** Trovare la corretta costante di normalizzazione ($c$);

   **b):** Calcolare, al tempo $t$, il valor medio di $\hat{x}$ e di $\hat{p}$, $\langle\hat{x}\rangle_t$, $\langle\hat{p}\rangle_t$;

   **c):** Calcolare, al tempo $t$, il valor medio di $\hat{x}^2$ e di $\hat{p}^2$, $\langle\hat{x}^2\rangle_t$, $\langle\hat{p}^2\rangle_t$, ed usare il risultato ottenuto per verificare il principio di indeterminazione, $\langle\Delta\hat{x}^2\rangle_t \, \langle\Delta\hat{p}^2\rangle_t \geq \frac{\hbar^2}{4}$.

   **[10 punti]**

2. Un oscillatore armonico di Hamiltoniana $\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$ sia stato preparato, al tempo $t = 0$, nello stato coerente $|\Psi_{x_0}\rangle = ce^{x_0\hat{a}^\dagger}|0\rangle$, corrispondente ad un autoket dell'operatore di discesa $\hat{a}$ con autovalore $x_0$ reale:

   **a)**: Trovare la corretta normalizzazione dello stato ($c$);

   **b)**: Calcolare il valor medio, sullo stato $|\Psi_{x_0}\rangle$, degli operatori $\hat{x}, \hat{p}, \hat{x}^2, \hat{p}^2$. Successivamente, usare il risultato ottenuto per verificare che risulta soddisfatto il principio di indeterminazione

   $\langle\Psi_{x_0}|(\Delta\hat{x})^2|\Psi_{x_0}\rangle \, \langle\Psi_{x_0}|(\Delta\hat{p})^2|\Psi_{x_0}\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$;

   **c)**: Calcolare il valor medio dell'energia sullo stato $|\Psi_{x_0}\rangle$.

   **Facoltativo**: Trovare lo stato del sistema al tempo $t$, $|\Psi_{x_0}(t)\rangle$.

   **[10 punti]**

3. Un momento angolare 1, $\vec{L}$, interagisce con un momento di spin-1/2, $\vec{S}$, secondo l'Hamiltoniana $\hat{H} = A\vec{L}\cdot\vec{S} - \hbar B(L_z + S_z)$, con $A, B$ costanti positive. Siano :$|l\rangle$ ($l = \pm 1, 0$) gli autoket di $\vec{L}^2, L_z$, con $L_z|l\rangle = \hbar l|l\rangle$ e $|s\rangle$ ($s = \pm\frac{1}{2}$) quelli di $\vec{S}^2, S_z$, con $S_z|s\rangle = \hbar s|s\rangle$:

   **a):** Trovare gli autovalori di $\hat{H}$ e scriverne i corrispondenti autoket come combinazioni dei prodotti di autoket di $L_z, S_z$, $|l\rangle \otimes |s\rangle$;

   **b):** Supposto che il sistema sia stato preparato, al tempo $t = 0$, nello stato $|\Psi(0)\rangle = |1\rangle \otimes |-\frac{1}{2}\rangle$, trovare lo stato del sistema al tempo $t$, $|\Psi(t)\rangle$;

   **c):** Usare il risultato del punto **b** per determinare il valor medio di $L_z$ al tempo $t$.

   **[10 punti]**

**Formule utili:** $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right)$.

# Appello straordinario, prova scritta: Meccanica Quantistica

## 30 Giugno 2010

1. Siano date le tre matrici di Pauli $\sigma_i$, $i = x, y, z$;

   **a):** Prese due delle tre matrici, $\sigma_i, \sigma_j$, con $i \neq j (= x, y, z)$, si definisca la matrice $\Sigma_{i,j}(a,b) = a\sigma_i + b\sigma_j$, con $a, b$ numeri complessi non nulli. Trovare, per ogni scelta di $i, j$, quale relazione debba intercorrere tra $a$ e $b$ perchè si abbia che e $[\Sigma_{i,j}(a,b)]^2 = 0$;

   **b):** Scelti, per ogni $i \neq j$, $a$ e $b$ come al punto **a)**, verificare che la corrispondente matrice $\Sigma_{i,j}(a,b)$ non è hermitiana e discuterne il significato fisico. Successivamente, calcolare $[\Sigma_{i,j}(a,b), \Sigma^\dagger_{i,j}(a,b)]$;

   **c):** Trovare, per ogni $i \neq j$, autovalori ed autoket della matrice hermitiana $i[\Sigma_{i,j}(a,b), \Sigma^\dagger_{i,j}(a,b)]$.

   **[10 punti]**

2. Un oscillatore armonico di Hamiltoniana $\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$ sia stato preparato, al tempo $t = 0$, nello stato $|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|0\rangle + ie^{i\alpha}|2\rangle\}$, con $\alpha$ reale:

   **a):** Determinare $\alpha$ in modo che $\langle\Psi(0)|\hat{x}|\Psi(0)\rangle$ assuma il massimo valore possibile;

   **b):** Trovare lo stato del sistema al tempo $t$, $|\Psi(t)\rangle$. Successivamente, calcolare $\langle\Psi(t)|\hat{V}|\Psi(t)\rangle$, dove $\hat{V} = \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$ è l'operatore energia potenziale. Discutere brevemente il risultato ottenuto in relazione a quello che ci si aspetterebbe di trovare su di uno stato stazionario.

   **[10 punti]**

3. Due spin-1/2, $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ interagiscono secondo l'Hamiltoniana $\hat{H} = AS_{1,x}S_{2,z}$, con $A$ costante reale e positiva.

   **a):** Trovare gli autovalori di $\hat{H}$ e scriverne i corrispondenti autoket come combinazioni dei prodotti di autoket di $S_{1,z}, S_{2,z}$, $|a\rangle_{1,z}\,|b\rangle_{2,z}$, con $a, b = \pm$;

   **b):** Supposto che il sistema sia stato preparato, al tempo $t = 0$, nello stato $|\Psi(0)\rangle = |+\rangle_{1,z}\,|+\rangle_{2,z}$, con $S_{1,z}|+\rangle_{1,z} = \frac{\hbar}{2}|+\rangle_{1,z}$ e $S_{2,z}|+\rangle_{2,z} = \frac{\hbar}{2}|+\rangle_{2,z}$, trovare lo stato del sistema al tempo $t$, $|\Psi(t)\rangle$;

   **c):** Usare il risultato del punto **b** per determinare il valor medio di $S_{1,z}$ al tempo $t$.

   **[10 punti]**

**Formule utili:** $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right)$.

# Appello straordinario, prova scritta: Meccanica Quantistica

## 14 Aprile 2010

1. Siano date le tre matrici di Pauli $\sigma_i$, $i = x, y, z$;

   **a):** Prese due delle tre matrici, $\sigma_i, \sigma_j$, con $i \neq j (= x, y, z)$, si definisca la matrice $\Sigma_{i,j}(a, b) = a\sigma_i + b\sigma_j$, con $a, b$ numeri complessi non nulli. Trovare, per ogni scelta di $i, j$, quale relazione debba intercorrere tra $a$ e $b$ perchè si abbia che $[\Sigma_{i,j}(a, b)]^2 = 0$;

   **b):** Scelti, per ogni $i \neq j$, $a$ e $b$ come al punto **a)**, verificare che la corrispondente matrice $\Sigma_{i,j}(a, b)$ non è hermitiana e discuterne il significato fisico. Successivamente, calcolare $[\Sigma_{i,j}(a, b), \Sigma^{\dagger}_{i,j}(a, b)]$;

   **c):** Trovare, per ogni $i \neq j$, autovalori ed autoket della matrice hermitiana $i[\Sigma_{i,j}(a, b), \Sigma^{\dagger}_{i,j}(a, b)]$.

   **[10 punti]**

2. Si consideri un oscillatore armonico di Hamiltoniana $\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$. Il suo $n$-esimo stato eccitato è dato da $|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$, dove $|0\rangle$ è il suo stato fondamentale ed $n = 0, 1, 2, \ldots$:

   **a):** Trovare $\langle n|(\Delta\hat{x})^2|n\rangle$ e $\langle n|(\Delta\hat{p})^2|n\rangle$ per ogni valore di $n$. Successivamente, verificare che vale il principio di indeterminazione $\langle n|(\Delta\hat{x})^2|n\rangle\langle n|(\Delta\hat{p})^2|n\rangle \geq \hbar^2/4$ e trovare per quale valore di $n$ il prodotto delle indeterminazioni su $\hat{x}$ ed $\hat{p}$ è minimo;

   **b):** Posto che, al tempo $t = 0$, il sistema sia stato preparato nello stato $|\Psi_n(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|n\rangle + |n+1\rangle\}$, trovare $|\Psi_n(t)\rangle$. Successivamente, usare il risultato ottenuto per trovare, usando il formalismo di Schrödinger, $x_n(t) = \langle\Psi_n(t)|\hat{x}|\Psi_n(t)\rangle$ e $p_n(t) = \langle\Psi_n(t)|\hat{p}|\Psi_n(t)\rangle$;

   **c):** Ripetere la seconda parte del punto **b)** usando lo schema di Heisenberg.

   **[10 punti]**

3. Due spin-1/2, $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ interagiscono secondo l'Hamiltoniana $\hat{H} = A\{S_{1,x}S_{2,x} + S_{1,y}S_{2,y} - S_{1,z}S_{2,z}\}$, con $A$ costante reale e positiva:

   **a):** Trovare gli autovalori di $\hat{H}$ e scriverne i corrispondenti autoket come combinazioni dei prodotti di autoket di $S_{1,z}, S_{2,z}$, $|a\rangle_{1,z}\, |b\rangle_{2,z}$, con $a, b = \pm$;

   **b):** Supposto che il sistema sia stato preparato, al tempo $t = 0$, nello stato $|\Psi(0)\rangle = |+\rangle_{1,z}\, |-\rangle_{2,z}$, trovare lo stato del sistema al tempo $t$, $|\Psi(t)\rangle$;

   **c): (Facoltativo)** Usare il risultato del punto **b** per determinare il valor medio di $S_{1,z}$ al tempo $t$.

   **[10 punti]**

**Formule utili:**

1. $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + i\frac{p}{m\omega}\right)$;
2. $S_{1,x}S_{2,x} + S_{1,y}S_{2,y} - S_{1,z}S_{2,z} = \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - 2S_{1,z}S_{2,z}$.

# Prima prova scritta: Meccanica Quantistica

## 18 Marzo 2010

1. Siano date la matrice $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e le tre matrici di Pauli $\sigma_i$, $i = x, y, z$;

   **a):** Trovare quali relazioni debbano intercorrere tra i numeri complessi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ perché la matrice $2{\times}2$, $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ sia Hermitiana;

   **b):** Dimostrare che una generica matrice Hermitiana $2{\times}2$, $\mathbf{M}$, si può scrivere nella forma $\mathbf{M} = a_0\mathbf{I} + \sum_{i=x,y,z} a_i\sigma_i$, con $a_0, a_i$ $(i = x, y, z)$ coefficienti reali. Successivamente, trovare l'espressione di $a_0$ e degli $a_i$ in termini degli elementi della matrice $\mathbf{M}$;

   **c):** Trovare gli autovalori della matrice Hermitiana $\mathbf{M} = a_0\mathbf{I} + \sum_{i=x,y,z} a_i\sigma_i$ e determinarne gli autoket come combinazione lineare degli autoket di $\sigma_z$, $|+\rangle_z$ e $|-\rangle_z$.

   **[10 punti]**

2. Un oscillatore armonico di Hamiltoniana $\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$ sia stato preparato, al tempo $t = 0$, nello stato $|\Psi(0)\rangle = c_0|0\rangle + c_2|2\rangle$:

   **a):** Determinare $c_0$ e $c_2$ sapendo che essi sono entrambi reali e positivi e che $\langle\Psi(0)|\hat{H}|\Psi(0)\rangle = \hbar\omega$;

   **b):** Trovare lo stato del sistema al tempo $t$, $|\Psi(t)\rangle$. Successivamente, calcolare $\langle\Psi(t)|\hat{T}|\Psi(t)\rangle$, dove $\hat{T} = \frac{p^2}{2m}$ è l'operatore energia cinetica. Discutere brevemente il risultato ottenuto in relazione a quello che ci si aspetterebbe di trovare su di uno stato stazionario.

   **[10 punti]**

3. Due spin-1/2, $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ interagiscono secondo l'Hamiltoniana $\hat{H} = A\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - \hbar B(S_{1,z} + S_{2,z})$, con $A, B$ costanti reali e positive.

   **a):** Trovare gli autovalori di $\hat{H}$ e scriverne i corrispondenti autoket come combinazioni dei prodotti di autoket di $S_{1,z}, S_{2,z}$, $|a\rangle_{1,z}\,|b\rangle_{2,z}$, con $a, b = \pm$. Dire per quale valore del rapporto $B/A$ $\hat{H}$ ammette un autovalore degenere;

   **b):** Supposto che il sistema sia stato preparato, al tempo $t = 0$, nello stato $|\Psi(0)\rangle = |+\rangle_{1,x}\,|+\rangle_{2,y}$, con $S_{1,x}|+\rangle_{1,x} = \frac{\hbar}{2}|+\rangle_{1,x}$ e $S_{2,y}|+\rangle_{2,y} = \frac{\hbar}{2}|+\rangle_{2,y}$, trovare lo stato del sistema al tempo $t$, $|\Psi(t)\rangle$;

   **c): (Facoltativo)** Usare il risultato del punto **b** per determinare il valor medio di $S_{1,z}$ al tempo $t$.

   **[10 punti]**

**Formule utili:** $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right)$.

**Meccanica quantistica**

23.11.2009

**Esercizio 1**

Una particella di spin 1/2 evolve nel tempo secondo l'hamiltoniana

$$H = -a\, S_z\,,$$

$a$ essendo una costante reale.
1) Scrivere l'operatore di evoluzione temporale come combinazione lineare delle matrici di Pauli.
2) Al tempo $t = 0$ la particella si trova nell'autostato di $S_x$ all'autovalore $\hbar/2$. Determinare il valore di aspettazione di $S_x$, $S_y$ e $S_z$ sullo stato evoluto al tempo $t$.

**[12 punti]**

**Esercizio 2**

Sia data l'Hamiltoniana unidimensionale:

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \alpha\hat{x}\,,$$

essendo $\alpha$ una costante reale.

Scrivere le equazioni di Heisenberg per $\hat{x}$ e $\hat{p}$ e risolverle, trovando $\hat{x}_H(t)$ e $\hat{p}_H(t)$. Calcolare quindi i commutatori

$$[\hat{x}_H(t)\,,\,\hat{x}]\,, \quad [\hat{p}_H(t)\,,\,\hat{p}]\,.$$

**[8 punti]**

**Esercizio 3**

Due particelle di spin 1/2 interagiscano secondo l'hamiltoniana

$$H = -a\,\vec{S_1}\cdot\vec{S_2}\,,$$

essendo $a$ una costante reale. All'istante $t = 0$ il sistema si trova nello stato $\mid\psi(0)\,\rangle = \mid +\,\rangle\mid -\,\rangle$. Determinare lo stato evoluto $\mid\psi(t)\,\rangle$ al tempo $t$ e il valore di aspettazione di $S_1^z$ al tempo $t$.

**[10 punti]**

Formule utili:

$$\hat{J}_\pm\mid j,m >= \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\mid j,m\pm 1 >$$

**Meccanica Quantistica**
17 Settembre 2009

**Esercizio 1**

Un elettrone in un campo magnetico uniforme diretto lungo l'asse $z$ è descritto dall'Hamiltoniana:

$$H = -\frac{e}{mc}\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$$

Scrivere l'operatore di evoluzione temporale $U(t)$ come combinazione lineare dell'identità e delle matrici di Pauli.

Supponendo che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nell'autoket di $\sigma_x$ con autovalore 1, trovare come varia nel tempo il valore di aspettazione di $S_x$, usando sia lo schema di Schrödinger che quello di Heisenberg.

**[10 punti]**

**Esercizio 2**

Sia data l'Hamiltoniana unidimensionale:

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \alpha\hat{x}^2 + \beta\hat{x}\,,$$

essendo $\alpha$, $\beta$ due costanti positive.

Scrivere le equazioni di Heisenberg per $\hat{x}$ e $\hat{p}$ e risolverle, trovando $\hat{x}_H(t)$ e $\hat{p}_H(t)$. Calcolare quindi i commutatori

$$[\hat{x}_H(t)\,,\,\hat{x}]\,, \quad [\hat{p}_H(t)\,,\,\hat{p}]\,.$$

**[10 punti]**

**Esercizio 3**

Sia dato lo stato dell'oscillatore armonico

$$\mid \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mid n\rangle + e^{i\alpha(n)} \mid n+1\rangle\right]$$

Calcolare su tale stato $\Delta x^2$ e $\Delta p^2$ in funzione di $\alpha(n)$ e verificare che la relazione di Heisenberg è soddisfatta. Per quali valori di $\alpha(n)$ $\Delta x^2 \Delta p^2$ è minimo?

**[10 punti]**

Formule utili:

$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \hat{J}_\pm| j, m >= \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}| j, m \pm 1 >$

# Meccanica quantistica

**I prova di recupero**

13 luglio 2009

## Esercizio 1

Due particelle di spin 1/2 interagiscano secondo l'hamiltoniana

$$H = -a\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2\,,$$

$a$ essendo una costante positiva.
1) Se il sistema al tempo $t = 0$ si trova nello stato $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mid +\rangle \mid -\rangle + \mid +\rangle \mid +\rangle)$, determinare lo stato evoluto al tempo $t$.
2) Determinare il valore di aspettazione di $S_1^z$ e $S_2^z$ al tempo $t$.

**[12 punti]**

## Esercizio 2

Sia dato un oscillatore armonico unidimensionale di massa $m$ e pulsazione $\omega$. Considerare lo stato

$$\mid \psi(0)\ \rangle = e^{-i\hat{p}\frac{l}{\hbar}} \mid 0\ \rangle\,,$$

e dimostrare che è autostato dell'operatore $\hat{a}$, determinandone l'autovalore.

Considerare poi l'evoluto temporale al tempo $t$

$$\mid \psi(t)\ \rangle = e^{-\frac{it\hat{H}}{\hbar}} \mid \psi(0)\ \rangle$$

e dimostrare che è ancora autostato di $\hat{a}$, determinandone l'autovalore.

**[8 punti]**

## Esercizio 3

Sia dato il sistema a due livelli $\mid 0\ \rangle, \mid 1\rangle$ e un'hamiltoniana $\hat{H}$ tale che

$$\hat{H} \mid 0\ \rangle = a \mid 0\ \rangle + b \mid 1\ \rangle\,, \quad \hat{H} \mid 1\ \rangle = a \mid 1\ \rangle + b \mid 0\ \rangle\,,$$

con $a$ e $b$ costanti reali. Determinare gli autovalori e gli autovettori di $\hat{H}$.

All'istante $t = 0$ il sistema si trova nello stato $\mid \psi(0)\ \rangle = \mid 0\ \rangle$. Determinare lo stato evoluto $\mid \psi(t)\ \rangle$ al tempo $t$.

Trovare come variano nel tempo le probabilità $|\langle\ 0 \mid \psi(t)\ \rangle|^2$ e $|\langle\ 1 \mid \psi(t)\ \rangle|^2$.

**[10 punti]**

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \hat{J}_{\pm}|\,j,m >= \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|\,j,m \pm 1 >$$

# Meccanica quantistica
## Prova scritta - I appello
I aprile 2009

1. Due particelle di spin 1/2 interagiscano secondo l'hamiltoniana
$$H = -a\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - b\,S_1^z\,,$$
$a$ e $b$ essendo due costanti positive o nulle.

   1) Supponendo $b = 0$, determinare autovettori, autovalori e loro degenerazione.

   2) Sia adesso $b > 0$. Determinare i nuovi autovalori.

   **[8 punti]**

2. Sia $\hat{l}_z$ la componente $z$ del momento angolare orbitale. Calcolare i seguenti commutatori:
$$[\hat{l}_z\,,\,\hat{p}_x]\,, \quad [\hat{l}_z\,,\,\hat{p}_y]\,, \quad [\hat{l}_z\,,\,\hat{p}_z]\,,$$
dove $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$, $\hat{p}_z$ sono le tre componenti dell'impulso.

   Calcolare poi le espressioni seguenti:
$$e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}\hat{l}_z}\,\hat{p}_x\,e^{i\frac{\alpha}{\hbar}\hat{l}_z}\,, \quad e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}\hat{l}_z}\,\hat{p}_y\,e^{i\frac{\alpha}{\hbar}\hat{l}_z}\,, \quad e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}\hat{l}_z}\,\hat{p}_z\,e^{i\frac{\alpha}{\hbar}\hat{l}_z}\,.$$
   Infine, dato il ket $|\,p_x, p_y, p_z\rangle$, autoket, rispettivamente, di $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$, $\hat{p}_z$ agli autovalori $p_x$, $p_y$, $p_z$, dimostrare che il ket
$$e^{i\frac{\alpha}{\hbar}\hat{l}_z}|\,p_x, p_y, p_z\rangle$$
è ancora autoket di $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$, $\hat{p}_z$ e determinarne i rispettivi autovalori.

   **[10 punti]**

3. Sia dato un oscillatore armonico unidimensionale di massa $m$ e pulsazione $\omega$. Dimostrare che per un generico autoket dell'hamiltoniana $|\,n\rangle$ vale l'uguaglianza
$$\langle n\,|\,\hat{T}\,|\,n\rangle = \langle n\,|\,\hat{V}\,|\,n\rangle\,,$$
essendo $\hat{T}$ e $\hat{V}$ rispettivamente l'energia cinetica e potenziale.

   Considerare adesso il caso di un potenziale generico unidimensionale:
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})\,.$$
   Calcolare il commutatore $[\hat{x}\hat{p}, \hat{H}]$ e usare tale risultato per dimostrare che
$$2\langle E\,|\,\hat{T}\,|\,E\rangle = \langle E\,|\,\hat{x}V'(\hat{x})\,|\,E\rangle\,,$$
essendo $|\,E\rangle$ un autoket dell'hamiltoniana.

   **[6 punti]**

4. Sia data una hamiltoniana unidimensionale

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \, .$$

1) Dimostrare la relazione di indeterminazione

$$\sigma_H^2 \sigma_x^2 \geq \frac{\hbar^2}{4m^2} |\langle \hat{p} \rangle|^2 \, .$$

2) Verificare tale relazione sugli stati stazionari dell'oscillatore armonico.

3) Nel caso di $V$ generico verificare e commentare tale relazione per gli stati stazionari di $\hat{H}$.

**[6 punti]**

Formule utili:

(1) $\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))$ ; (2) $\hat{J}_\pm |j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\, |j, m \pm 1\rangle$.

# Meccanica quantistica

**Prova scritta - appello straordinario**

20 novembre 2008

1. Dimostrare che le matrici di Pauli, $\sigma_i$, $i = 1, 2, 3$, insieme con l'identità $I$, formano una base per tutte le matrici $2 \times 2$ ad elementi complessi.

   Ridurre, quindi, a combinazione lineare delle matrici di Pauli e dell'identità le seguenti matrici $2 \times 2$:
   $$(c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3)^2 \ , \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C} \ ;$$
   $$e^{\sigma_i} \ , \quad i = 1, 2, 3 \ ;$$
   $$e^{i(\sigma_1+\sigma_2)} \ .$$

   **[10 punti]**

2. Un oscillatore armonico si trovi nello stato
   $$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \ ,$$
   dove $|n\rangle$ è l'autostato dell'Hamiltoniana con energia $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

   Dire quanto vale la probabilità $P$ che una misura dell'energia su $|\psi(0)\rangle$ dia un risultato maggiore di $2\hbar\omega$.

   Determinare lo stato $|\psi(0)\rangle$ utilizzando le seguenti informazioni:

   - $P = 0$
   - normalizzazione ad 1
   - $\langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle = \hbar\omega$
   - $\langle\psi(0)|x|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

   Determinare lo stato evoluto $|\psi(t)\rangle$ all'istante $t = \pi/\omega$.

   **[10 punti]**

3. Si trovino le matrici rappresentative degli operatori $L_x$ ed $L_y$ sugli stati con $l = 1$ rispetto alla base data dagli autostati di $L_z$, $\{|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle\}$.

   Data l'Hamiltoniana
   $$H = A(L_x^2 - L_y^2) \ ,$$
   dove $A$ è una costante reale, se ne trovino autovalori ed autoket.

   Si determini, infine, l'evoluzione temporale dello stato $|1, -1\rangle$.

   **[10 punti]**

Formule utili:

(1) $\hat{L}_\pm|l, m\rangle = \hbar\sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}\,|l, m \pm 1\rangle$
(2) $\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))$

# Meccanica quantistica
**Prova scritta - II appello di recupero**
11 settembre 2008

1. (a) Calcolare il commutatore $[\hat{x}, f(\hat{p})]$, dove $f$ è una funzione arbitraria.

   (b) Usando il risultato precedente, calcolare $e^{-i\,f(\hat{p})}\ \hat{x}\ e^{i\,f(\hat{p})}$.

   (c) Calcolare il valor medio di $\hat{x}$ sullo stato $e^{i\,f(\hat{p})}|\alpha\rangle$, dove $|\alpha\rangle$ è un generico ket ed $f(\hat{p})$ è un operatore hermitiano.

   (d) Dare un'interpretazione fisica dei risultati ottenuti nel caso particolare in cui $f(\hat{p}) = \hat{p}a/\hbar$, con $a$ costante reale.

   **[10 punti]**

2. (a) Un oscillatore armonico si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + |1\rangle\Big)\ .$$

   Determinare come cambia nel tempo il valor medio su questo stato dell'operatore energia potenziale, $\hat{U} = m\omega^2\hat{x}^2/2$, usando **sia** lo schema di Schrödinger, **sia** quello di Heisenberg.

   **[10 punti]**

3. Due particelle, una di spin 1/2, l'altra di spin 1, interagiscano secondo l'Hamiltoniana

$$\hat{H} = A\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2 + B\hbar(\hat{S}_{1,z} + \hat{S}_{2,z})\ ,$$

   dove $A$ e $B$ sono costanti reali. Se inizialmente il sistema si trova nello stato $|0\rangle|-\rangle$, trovare la probabilità che, ad un generico istante di tempo $t$, il sistema si trovi nello stato $|0\rangle|+\rangle$.

   **[10 punti]**

Formule utili:

(1) $\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))$ ; (2) $\hat{J}_\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\,|j,m \pm 1\rangle$.

# Meccanica quantistica

**Prova scritta - I appello di recupero**

9 luglio 2008

1. (a) Calcolare il commutatore $[\hat{p}, f(\hat{x})]$, dove $f$ è una funzione arbitraria.

   (b) Usando il risultato precedente, calcolare $e^{-i\, f(\hat{x})}\ \hat{p}\ e^{i\, f(\hat{x})}$.

   (c) **Usando (b)** calcolare $e^{-i\, f(\hat{x})}\ \hat{p}^n\ e^{i\, f(\hat{x})}$, con $n$ intero.

   (d) (Facoltativo) Generalizzare il risultato all'espressione $e^{-i\, f(\hat{x})}\ g(\hat{p})\ e^{i\, f(\hat{x})}$, dove $g$ è una funzione arbitraria.

   **[10 punti]**

2. (a) Un sistema unidimensionale ha Hamiltoniana della forma

   $$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \ .$$

   Si scriva l'equazione del moto di Heisenberg per l'operatore $\hat{x}\hat{p}$ e si dimostri che

   $$\frac{d}{dt}\langle \hat{x}\hat{p} \rangle = 0 \ ,$$

   se il valor medio è calcolato su un autostato dell'Hamiltoniana.

   (b) Si deduca da questo fatto che, su un autostato dell'Hamiltoniana,

   $$\left\langle \frac{\hat{p}^2}{m} \right\rangle = \left\langle \hat{x} \frac{dV}{dx} \right\rangle \ .$$

   (c) Usando il risultato precedente, si determini il valor medio dell'energia cinetica e quello dell'energia potenziale su un generico stato stazionario di un oscillatore armonico unidimensionale.

   **[10 punti]**

3. Un sistema formato da due particelle distinte di spin 1/2 interagisca secondo l'Hamiltoniana

   $$\hat{H} = A \hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2 \ ,$$

   dove $A$ è una costante reale. Se inizialmente il sistema si trova nello stato $|+\rangle|-\rangle$, trovare la probabilità che, ad un generico istante di tempo $t$, la misura della componente $z$ dello spin della prima particella dia come risultato $+\hbar/2$.

   **[10 punti]**

Formule utili:

(1) $\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))$ ; (2) $\hat{J}_{\pm}|j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\,|j, m \pm 1\rangle$.

# Meccanica quantistica
**Prova scritta - appello straordinario**
23 giugno 2008

1. Si calcolino i seguenti commutatori:

$$\left[\hat{x}, e^{i\hat{p}_x b/\hbar}\right] , \qquad \left[\hat{p}_x, e^{i\hat{x}c/\hbar}\right] ,$$

dove $b$ e $c$ sono costanti reali. **[6 punti]**

2. Costruire uno stato di oscillatore armonico unidimensionale di pulsazione $\omega$ per il quale valga che

   - la probabilità che una misura di energia dia $\hbar\omega/2$ sia pari a $1/3$;
   - la probabilità che una misura di energia dia $3\hbar\omega/2$ sia pari a $2/3$;
   - il valor medio di $\hat{x}$ sia pari a $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}$.

**[8 punti]**

3. Siano $|1\rangle$ e $|2\rangle$ gli elementi di una base ortonormale di un sistema. L'Hamiltoniana del sistema agisce come segue sugli elementi della base:

$$\hat{H}|1\rangle = \alpha|2\rangle , \qquad \hat{H}|2\rangle = \alpha|1\rangle ,$$

con $\alpha$ costante reale. Se il sistema al tempo $t = 0$ si trova nello stato $|1\rangle$, determinare come varia nel tempo la probabilità che il sistema si trovi nello stato $|2\rangle$. **[8 punti]**

4. Si consideri un sistema di due particelle, una con spin $S_1 = 1/2$, l'altra con spin $S_2 = 1$. Se la prima particella si trova nello stato $|-\rangle$ e la seconda nello stato $|1, 1\rangle$, dire quali sono i possibili risultati della misura di $\vec{S}^2$ e di $S_z$ (dove $\vec{S}$ è lo spin totale) con le relative probabilità. **[8 punti]**

Formule utili:

(1) $\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))$ ; (2) $\hat{J}_\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\,|j, m \pm 1\rangle$.

# Meccanica quantistica

**Prova scritta - I appello**

I aprile 2008

1. (a) Calcolare i seguenti commutatori:

$$[\hat{l}_z, \hat{x}] \ , \qquad [\hat{l}_z, \hat{y}] \ , \qquad [\hat{l}_z, \hat{z}] \ ,$$

dove $\hat{l}_z$ è la terza componente del momento angolare orbitale di una particella.

(b) Verificare che lo stato

$$\left(1 - i\hat{l}_z \frac{\varepsilon}{\hbar}\right) |x', y', z'\rangle \ ,$$

dove $\varepsilon$ è una costante reale adimensionale infinitesima, è autostato degli operatori $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ (con quali autovalori?).

(c) Interpretare il risultato ottenuto in (b). **[10 punti]**

2. (a) Un sistema unidimensionale ha l'Hamiltoniana della forma

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \ .$$

Si scriva l'equazione del moto di Heisenberg per l'operatore $\hat{x}\hat{p}$.

(b) Nel caso particolare in cui $\hat{H}$ sia l'Hamiltoniana di un oscillatore armonico unidimensionale, si calcoli, lavorando nello schema di Heisenberg,

$$\frac{d}{dt}\langle 0|\hat{x}\hat{p}|0\rangle \ ,$$

dove $|0\rangle$ è lo stato fondamentale.

(c) Si commenti il risultato ottenuto in (b). **[10 punti]**

3. Un sistema formato da una particella di spin $S_1 = 1$ e da una di spin $S_2 = 1/2$ sia soggetto all'Hamiltoniana

$$\hat{H} = A + \frac{B}{\hbar^2}\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2 \ ,$$

dove $A$ e $B$ sono costanti reali. Se inizialmente il sistema si trova nello stato $|1, -1\rangle|+\rangle$, trovare lo stato evoluto ad un generico istante di tempo $t$. Calcolare sullo stato evoluto il valor medio di $\hat{H}$ e di $\hat{S}_{1,x}$. **[10 punti]**

Formule utili:

(1) $\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))$ ; (2) $\hat{J}_\pm|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\,|j, m \pm 1\rangle$.

# Meccanica quantistica

**Prova scritta - appello straordinario**

22 novembre 2007

1. Dimostrare che
$$[x, f(p)] = i\hbar \frac{df(p)}{dp} \ .$$
Usare questa informazione per calcolare il commutatore $[\hat{a}, e^{ip\lambda}]$, dove $\hat{a}$ è l'operatore di discesa per un oscillatore armonico unidimensionale.

   Dimostrare infine che $e^{ip\lambda}|0\rangle$, con $|0\rangle$ stato fondamentale dell'oscillatore armonico e $\lambda$ costante, è un autostato dell'operatore $\hat{a}$.

   **[8 punti]**

2. Un oscillatore armonico unidimensionale si trova nello stato
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + e^{i\alpha}|1\rangle\Big),$$
con $\alpha$ costante reale. Trovare il valore di $\alpha$ per cui è massimo $\langle \hat{x} \rangle$. Per quel valore di $\alpha$ determinare poi $\langle \hat{x}(t) \rangle$.

   **[6 punti]**

3. Un elettrone (spin 1/2) ha spin orientato lungo la bisettrice del I e del III quadrante del piano $xy$. Scrivere lo stato di spin come combinazione degli autostati di $\hat{S}_z$.

   **[7 punti]**

4. L'interazione di spin-orbita di una particella di spin 1/2 e momento angolare orbitale $l$=1 è della forma
$$\hat{H} = A\hat{\vec{s}} \cdot \hat{\vec{l}} \ .$$
Trovare lo spettro energetico e gli autostati di $\hat{H}$. Se lo stato iniziale è dato da
$$|\psi(t=0)\rangle = |1,0\rangle|+\rangle \ ,$$
trovare lo stato evoluto $|\psi(t)\rangle$ e calcolare la probabilità che, ad un generico istante di tempo $t$, il risultato di una misura sia che il sistema si trovi nello stato iniziale. **[9 punti]**

Formule utili:

(1) $\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))$ .

# Meccanica quantistica

**Prova scritta - II prova di recupero**

13 settembre 2007

1. Siano $A$ e $B$ due operatori per i quali valga $[A, B] = c$, con $c$ costante reale.

   (i) Calcolare $[A^n, B]$, con $n$ intero positivo maggiore di 1, e $[f(A), B]$, con $f$ funzione analitica;

   (ii) dimostrare che $e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = B + \lambda\, c$ ($\lambda$ costante reale). **[7 punti]**

2. Un oscillatore armonico unidimensionale si trova nello stato
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + e^{i\alpha}|1\rangle\Big),$$
   con $\alpha$ costante reale. Calcolare su questo stato $\Delta x^2$ e trovare i valori di $\alpha$ per cui prende valore minimo. Ripetere lo stesso calcolo per $\Delta p^2$. Verificare infine che, per i valori di $\alpha$ trovati, $\Delta x^2\, \Delta p^2$ soddisfa la relazione di indeterminazione di Heisenberg. **[7 punti]**

3. L'Hamiltoniana per una particella di spin 1/2 sia della forma
$$\hat{H} = A(1 + \sigma_x)\ ,$$
   dove $A$ è una costante reale e $\sigma_x$ è la prima matrice di Pauli. Se la particella si trova a $t = 0$ nello stato di spin $|+\rangle \equiv |S_z = +\hbar/2\rangle$, determinarne l'evoluzione temporale. Calcolare la probabilità in funzione del tempo che il risultato della misura di $S_z$ sia $+\hbar/2$. **[8 punti]**

4. L'Hamiltoniana di interazione di un sistema elettrone-positrone (entrambi particelle di spin 1/2) con un campo magnetico esterno è della forma
$$\hat{H} = A(\hat{S}_{1,z} - \hat{S}_{2,z})\ .$$
   Trovare lo spettro energetico e gli autostati di $\hat{H}$. Se lo stato iniziale è dato da
$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle\Big)\ ,$$
   trovare lo stato evoluto $|\psi(t)\rangle$ e calcolare la probabilità che, ad un generico istante di tempo $t$, il risultato di una misura sia che il sistema si trovi nello stato iniziale. **[8 punti]**

Formule utili:

(1) $\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))$ .

# Meccanica quantistica

**Prova scritta - I prova di recupero**

4 luglio 2007

1. Una particella soggetta a potenziale armonico unidimensionale con pulsazione $\omega$ si trova nello stato
$$|\psi\rangle = A|0\rangle + B|1\rangle \ ,$$
dove $A$ e $B$ sono costanti *reali*. Trovare i valori di $A$ e $B$ che massimizzano e quelli che minimizzano $\langle \hat{x} \rangle$.

   Fissati $A$ e $B$ ai valori che massimizzano $\langle \hat{x} \rangle$, si calcolino i valori medi dell'energia cinetica e dell'energia potenziale sullo stato $|\psi\rangle$. **[10 punti]**

2. Un elettrone che a $t = 0$ si trova in quiete nello stato di spin $|+\rangle \equiv |S_z = +\hbar/2\rangle$ viene sottoposto ad un campo magnetico uniforme $\vec{B} = (B, 0, 0)$. Ricordando che l'Hamiltoniana di interazione è data da
$$\hat{H} = -\frac{e}{mc}\hat{\vec{S}} \cdot \vec{B} \ ,$$
determinare l'evoluzione temporale dello stato dell'elettrone. Calcolare la probabilità in funzione del tempo che il risultato della misura di $S_z$ sia $+\hbar/2$. Ripetere il calcolo per la misura di $S_y$. **[10 punti]**

3. L'interazione spin-spin tra due particelle distinte di spin 1/2 sia descritta dalla Hamiltoniana
$$\hat{H} = A(\hat{S}_{1,z} + \hat{S}_{2,z}) + B(\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2) \ .$$
Trovare lo spettro energetico e gli autostati di $\hat{H}$. Dire per quali valori di $A$ e $B$ tale spettro è degenere. Se lo stato iniziale è dato da
$$|\psi(t = 0)\rangle = |+\rangle|-\rangle \ ,$$
trovare lo stato evoluto $|\psi(t)\rangle$. **[10 punti]**

Formule utili:

(1) $\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))$ ; (2) $\hat{J}_\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\,|j, m \pm 1\rangle$.

# Meccanica quantistica
## Prova scritta - I appello
30 marzo 2007

1. Una particella soggetta a potenziale armonico unidimensionale con pulsazione $\omega$ si trova in uno stato sul quale la misura di energia può dare con uguale probabilità $\hbar\omega/2$ e $3\hbar\omega/2$. Determinare tale stato richiedendo che su esso sia massimo $\langle \hat{p} \rangle$. Supposto che quello ottenuto sia lo stato del sistema a $t = 0$, se ne determini l'evoluto al tempo $t$. [**8 punti**]

2. (a) Si scriva la matrice rappresentativa degli operatori $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ e $\hat{S}_z$ nello spazio degli stati di spin 1, rispetto alla base $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$ formata dagli autostati di $\hat{\vec{S}}^2$ e $\hat{S}_z$. Si trovino poi gli autovettori di $\hat{S}_x$. [**4 punti**]

   (b) Una particella che a $t = 0$ si trova in quiete nello stato di spin $|S = 1, S_x = 1\rangle$ viene sottoposta ad un campo magnetico uniforme $\vec{B} = (0, 0, B)$. Detta
$$\hat{H} = -\mu \hat{\vec{S}} \cdot \vec{B}$$
   l'Hamiltoniana del sistema, trovare la probabilità che la particella si trovi nello stato iniziale dopo un intervallo di tempo $t$. [**5 punti**]

   (c) Per ciascuno degli autostati di $\hat{S}_z$ si trovino i possibili risultati della misura di $S_x$ con la relativa probabilità. Dire su quale di questi stati è massimo il valore della dispersione di $S_x$ e spiegarne il motivo. [**5 punti**]

3. L'interazione spin-spin tra una particella di spin 1 ed una di spin 1/2 sia descritta dalla Hamiltoniana
$$\hat{H} = -a(\hat{\vec{S}}_1 \hat{\vec{S}}_2) \ .$$
   Se lo stato iniziale è dato da
$$|\psi(t=0)\rangle = |1,1\rangle|-\rangle \ ,$$
   trovare lo stato evoluto $|\psi(t)\rangle$. Calcolare in funzione del tempo
$$\langle \psi(t)|\hat{S}_{1,z}|\psi(t)\rangle \ .$$
   [**8 punti**]

Formule utili:

(1) $\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))$ ; (2) $\hat{J}_\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\,|j, m \pm 1\rangle$.

# Meccanica quantistica

**Prova scritta - appello straordinario**

21 novembre 2006

1. Dato che
$$[\hat{A}, \hat{B}] = 1\,; \quad [\hat{A}, \hat{B}^2] = c\,\hat{B}\,,$$
dove $c$ è un numero, trovate il valore di $c$.

2. Calcolate la dispersione $\Delta \hat{l}_x^2$ su uno stato di definito momento angolare $|l, m\rangle$ e dite per quale valore di $m$ essa è massima.

   *Note utili:*
$$\hat{l}_+|l, m\rangle = \hbar\sqrt{(l-m)(l+m+1)}|l, m+1\rangle\ ,$$
$$\hat{l}_-|l, m\rangle = \hbar\sqrt{(l+m)(l-m+1)}|l, m-1\rangle\ .$$

3. Un sistema quantistico a due livelli sia descritto dalla Hamiltoniana
$$\hat{H} = H_0 \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Trovate lo spettro energetico di questo sistema e costruite gli autovettori normalizzati. Per quali valori di $a$ questo spettro è degenere?

   (b) Trovate l'evoluzione temporale $|\psi(t)\rangle$ dello stato che inizialmente $t = 0$ era
$$|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   (c) Trovate i valori di $a$ per i quali sia nulla la probabilità che al tempo $t = \pi\hbar/H_0$ lo stato $|\psi(t)\rangle$ si trovi nello stato iniziale.

4. L'interazione spin-spin tra due particelle di spin 1/2 sia descritta dalla Hamiltoniana
$$\hat{H} = a(\hat{\vec{s}}_1\hat{\vec{s}}_2)\,.$$
   Considerate lo stato iniziale
$$|\psi(t=0)\rangle = |+\rangle|-\rangle\,.$$
   Trovate l'evoluzione temporale di questo stato. Calcolate in funzione del tempo i seguenti valori medi:
$$\langle\psi(t)|\hat{s}_{1,z}|\psi(t)\rangle\ , \quad \langle\psi(t)|\hat{s}_{2,z}|\psi(t)\rangle\ , \quad \langle\psi(t)|\hat{s}_{1,z}\hat{s}_{2,z}|\psi(t)\rangle\ .$$

# Meccanica quantistica, III anno

## Prova scritta

11 settembre 2006

1. Considerate due operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$ che agiscono sui vettori di una base $\{|n\rangle\}$, $n = 0,\, 1,\, 2,\, \dots$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \hat{A}|n\rangle &= |n-1\rangle \quad \text{per} \quad n > 0\,, \quad \hat{A}|0\rangle = 0 \\ \hat{B}|n\rangle &= |n+1\rangle\,. \end{aligned}$$

   Dimostrate che $\hat{A}\hat{B} = 1$ e che $[\hat{A},\, \hat{B}] = \hat{P}_0$ è il proiettore sullo stato $|0\rangle$.

2. Un sistema quantistico a due livelli sia descritto dalla Hamiltoniana

$$\hat{H} = H_0 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Trovate lo spettro energetico di questo sistema e costruite gli autovettori normalizzati. È questo spettro degenere?

   (b) Trovate l'evoluzione temporale $|\psi(t)\rangle$ dello stato che inizialmente $t = 0$ era

$$|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Qual è la probabilità di ritrovare in $|\psi(t)\rangle$ lo stato iniziale?

3. L'interazione spin-spin tra due neutroni sia descritta dalla Hamiltoniana

$$\hat{H} = -a(\hat{\vec{S}}\hat{\vec{s}}_1)\,,$$

   dove $\hat{S}$ è lo spin totale. Considerate lo stato iniziale

$$|\psi(t=0)\rangle = |+\rangle|-\rangle\,.$$

   Trovate l'evoluzione temporale di questo stato. Determinate come dipende dal tempo il valore medio della proiezione $s_{1z}$ del primo spin,

$$s_{1z}(t) = \langle\psi(t)|\hat{s}_{1z}|\psi(t)\rangle\,.$$

# Meccanica quantistica, III anno

**Prova scritta**

10 luglio 2006

1. Tre operatori hermitiani $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ soddisfano le sequenti regole di commutazione:
$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}\,, \quad [\hat{A}, \hat{C}] = -i\hat{B}\,.$$
Trovate il valore del commutatore $[\hat{A}, \hat{B}^2 + \hat{C}^2]$.

2. Un sistema quantistico a due livelli sia descritto dalla Hamiltoniana
$$\hat{H} = 2H_0|1\rangle\langle 1| \;+\; 2H_0|2\rangle\langle 2| \;+\; H_0|1\rangle\langle 2| \;+\; H_0|2\rangle\langle 1|\,,$$
dove stati $|1\rangle$ e $|2\rangle$ sono gli autostati normalizzati di una grandezza osservabile $A$ con gli autovalori $+a$ e $-a$, rispettivamente.

   (a) Trovate lo spettro energetico di questo sistema e costruite gli autovettori normalizzati. È questo spettro degenere?

   (b) Verificate se l'operatore $\hat{A}$ commuta con l'Hamiltoniana.

   (c) Trovate l'evoluzione temporale $|\psi(t)\rangle$ dello stato che inizialmente $t = 0$ era $|1\rangle$. Come dipende dal tempo il valore medio di $A$, $a(t) = \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle$, in questo stato?

3. L'interazione spin-spin tra due neutroni sia descritta dalla Hamiltoniana
$$\hat{H} = -a[\hat{\vec{s}}_1^{\,2} + (\hat{\vec{s}}_1\hat{\vec{s}}_2) + \hat{\vec{s}}_2^{\,2}]\,.$$
Considerate lo stato iniziale
$$|\psi(t=0)\rangle = |+\rangle|-\rangle\,.$$
Trovate l'evoluzione temporale di questo stato. Determinate come dipende dal tempo il valore medio della proiezione $s_{1z}$ del primo spin,
$$s_{1z}(t) = \langle\psi(t)|\hat{s}_{1z}|\psi(t)\rangle\,.$$

# Meccanica quantistica, III anno

**Prova scritta**

29 marzo 2006

1. Un sistema quantistico a tre livelli sia descritto dalla Hamiltoniana
$$\hat{H} = H_0 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$
   (a) Trovate lo spettro energetico di questo sistema e costruite gli autovettori normalizzati. È questo spettro degenere?
   (b) Trovate evoluzione temporale $|\psi(t)\rangle$ dello stato che inizialmente era localizzato sul primo livello:
$$|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$
   Qual è la probabilità di ritrovare in $|\psi(t)\rangle$ lo stato iniziale?

2. Trovate l'incertezza della energia potenziale $\langle 0|(\Delta\hat{U})^2|0\rangle$ nello stato fondamentale dell'oscillatore armonico monodimensionale.

   *Suggerimento:*
$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) .$$

3. L'interazione spin-spin tra due neutroni sia descritto dalla Hamiltoniana
$$\hat{H} = -a(\hat{\vec{s}}_1\hat{\vec{s}}_2) .$$
   Considerate lo stato iniziale
$$|\psi(t=0)\rangle = |+\rangle_x|+\rangle_z ,$$
   cioè lo stato in cui il primo neutrone è polarizzato lungo l'asse $x$ (con proiezione positiva) mentre il secondo è polarizzato lungo l'asse $z$. Trovate l'evoluzione temporale di questo stato. Dimostrate che all'istante $\tau = \pi\hbar/a$ lo stato può essere rappresentato come
$$|\psi(t=\tau)\rangle = |+\rangle_z|+\rangle_x .$$

**Meccanica quantistica**
**Prova scritta intermedia**
9 febbraio 2006

1. Considerate la famiglia di operatori $\hat{K}_a = \hat{x} + a\hat{p}$, dove $a$ è una costante reale.
   (a) Trovate il comutatore $[\hat{K}_a, \hat{K}_b]$
   (b) Trovate l'operatore $\hat{K}_c$ che comuta con $\hat{K}_a + \hat{K}_b$.

2. Un sistema quantistico a tre livelli sia descritto dalla Hamiltoniana

$$\hat{H} = a \sum_{i,j=1}^{3} |i\rangle\langle j| \, .$$

   (a) Trovate lo spettro energetico di questo sistema e costruite gli autovettori normalizzati. È questo spettro degenere?
   (b) Osservate che la Hamiltoniana è simmetrica sotto lo scambio $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$. Dimostrate che l'operatore $\hat{T}$ che realizza questo scambio commuta con la Hamiltoniana.
   (c) Controllate se gli autovettori della Hamiltoniana già trovati siano pure autovettori di $\hat{T}$. Se no, costruite un base comune di autovettori di entrambi gli operatori e trovate gli autovalori dell'operatore $\hat{T}$.

# Meccanica quantistica

**Prova scritta**

3 Novembre 2005

1. Dato che
$$[\hat{A}^2, \hat{B}] = c_1 \, ; \quad [\hat{A}, \hat{B}^2] = c_2 \, ,$$
dove $c_i$ sono numeri, trovate i valori di $c_1$ e $c_2$.

   *Suggerimento:* Conviene cominciare dal commutatore $[\hat{A}^2, \hat{B}^2]$.

2. Una particella soggetta a potenziale armonico unidimensionale si trova nello stato
$$|\psi_\alpha\rangle = C\Big(|0\rangle + \alpha|1\rangle + \alpha^2|2\rangle\Big) \, , \tag{1}$$
dove $\alpha$ è un numero complesso e $C$ è la costante di normalizzazione.
   (a) Trovate il valore di $C$.
   (b) Trovate l'energia della particella in questo stato.
   (c) Dimostrate che sotto l'evoluzione temporale $|\psi_\alpha\rangle$ conserva la sua forma (1) salvo che il parametro $\alpha$ cambia periodicamente. Trovate $\alpha(t)$.

3. Un sistema quantistico di due particelle di spin $\frac{1}{2}$ è descritto dall'hamiltoniana
$$\hat{H} = -(\hat{\vec{S}}\vec{a})^2 \, ,$$
dove $\hat{S}$ è l'operatore di spin totale, $\vec{a}$ è un vettore fisso. Trovate lo spettro energetico di questo sistema. È questo spettro degenere? Come dipende da $|\vec{a}|$ la molteplicità di degenerazione?

   *Suggerimento:* Conviene scegliere l'asse $z$ lungo la direzione di $\vec{a}$.

# Meccanica quantistica

**Prova scritta - II appello**

6 Settembre 2005

1. Dato che
$$[\hat{A}, \hat{B}] = c_1\,; \quad [\hat{A}^2, \hat{B}] = c_2\,,$$
dove $c_i$ sono numeri, trovate i valori di $c_1$ e $c_2$.

2. Una particella soggetta a potenziale armonico unidimensionale si trova nello stato
$$|\psi_\alpha\rangle = C\left(|0\rangle + \alpha|1\rangle + \alpha^2|2\rangle + \alpha^3|3\rangle + \ldots\right)\,, \tag{1}$$
dove $\alpha$ è un numero complesso e $C$ è la costante di normalizzazione.
   (a) Trovate il valore di $C$.
   (b) Trovate l'energia della particella in questo stato.
   (c) Dimostrate che sotto l'evoluzione temporale $|\psi_\alpha\rangle$ conserva la sua forma (1) salvo che il parametro $\alpha$ cambia periodicamente. Trovate $\alpha(t)$.

   *Formule utili:*
$$1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots = \frac{1}{1-x}\,; \quad x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots = \frac{x}{(1-x)^2}\,.$$

3. Un sistema quantistico di due particelle di spin $\frac{1}{2}$ è descritto dall'hamiltoniana
$$\hat{H} = -H_0(\hat{\vec{S}} - \vec{a})^2\,,$$
dove $\hat{S}$ è l'operatore di spin totale, $\vec{a}$ è un vettore fisso e $H_0$ è una costante positiva.
   (a) Trovate lo spettro energetico di questo sistema.
   (b) È questo spettro degenere? Come dipende da $|\vec{a}|$ la molteplicità di degenerazione?
   (c) Quale valore di $|\vec{a}|$ genera uno spettro equispaziato?
   (d) Trovate l'evoluzione nel tempo dello stato $|\psi\rangle$, il cui stato iniziale è $|\psi(t=0)\rangle = |+\rangle|-\rangle$.

   *Suggerimento:* Conviene scegliere l'asse $z$ lungo la direzione di $\vec{a}$.

**Meccanica quantistica**
**Prova scritta - I appello**
7 Aprile 2005

1. Qual è l'operatore $\hat{A}$, costruito a partire dagli operatori $\hat{x}$ e $\hat{p}$, per il quale i commutatori con $\hat{x}$ e con $\hat{p}$ siano proporzionali? Cercate di rappresentare la risposta nella forma più generale. **[5 punti]**

2. Calcolate i valori medi degli operatori $\hat{\ell}_x$, $\hat{\ell}_y$, e $\hat{\ell}_z$ sul seguente stato di particella con momento angolare 1:
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle + |1,0\rangle)\,.$$
**[5 punti]**

3. Un sistema quantistico di due particelle di spin $\frac{1}{2}$ è descritto dall'hamiltoniana
$$\hat{H} = -H_0(\vec{S}^2 - 2S_z^2)\,,$$
dove $\vec{S}$ è l'operatore di spin totale e $H_0$ è una costante positiva.
   (a) Trovate lo spettro energetico di questo sistema. È questo spettro degenere?
   (b) Trovate l'evoluzione nel tempo dello stato $|\psi\rangle$, il cui stato iniziale è $|\psi(t=0)\rangle = |+\rangle|-\rangle$. **[6 punti]**

4. Calcolate il commutatore $[\hat{x}(t), \hat{x}(0)]$ per una particella sotto il campo della forza uniforme $U(x) = -F\,x$. **[6 punti]**

5. Per una particella soggetta a potenziale armonico unidimensionale, trovate gli autovalori dell'operatore
$$\hat{O} = \hat{a}^\dagger\hat{a} - \lambda\,\hat{a}^\dagger - \lambda^*\,\hat{a}\,,$$
dove $\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$ sono gli usuali operatori di creazione e distruzione, e $\lambda$ è una costante complessa.

   *Suggerimento:* considerate gli operatori traslati $\hat{p}' = \hat{p} + \Delta p$ e $\hat{x}' = \hat{x} + \Delta x$. **[8 punti]**