Prova scritta: introduzione alla fisica quantistica

8 novembre 2011

1. In uno spazio vettoriale a tre dimensioni sia definita la base ortonormale costituita dai ket $|i\rangle$ $(i = 1, 2, 3)$. Si definiscano gli operatori $\hat{A} = e^{i\alpha}\{|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 3|\} + e^{i\beta}\{|2\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 1|\}$ e $\hat{B} = e^{i\gamma}\{|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|\}$.

   a): Dire quali condizioni debbono soddisfare α, β e γ affinché $\hat{A}$ e $\hat{B}$ corrispondano ad una osservabile fisica;

   b): Scelte α e β in modo da soddisfare la condizione al punto **a**), trovare autovalori ed autoket di $\hat{A}$;

   c): Scelta γ in modo da soddisfare la condizione al punto **a**), trovare autovalori ed autoket di $\hat{B}$.

   [10 punti]

2. Un oscillatore armonico di Hamiltoniana $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ sia stato preparato, al tempo $t = 0$, nello stato $|\Psi(0)\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, con α, β costanti numeriche, reali e positive.

   a): Determinare α e β sapendo che, al tempo $t = 0$, il valor medio dell'energia sullo stato $|\Psi(0)\rangle$ è pari a $E_0 = \frac{7}{6}\hbar\omega$;

   b): Trovare lo stato del sistema al tempo t, $|\Psi(t)\rangle$. Successivamente, calcolare il valor medio dell'energia e della coordinata $\hat{x}$ al tempo t;

   c): Calcolare il valor medio di $(\Delta\hat{x})^2$ e di $(\Delta\hat{p})^2$ su $|\Psi(0)\rangle$ e verificare che il risultato è coerente con il principio di indeterminazione.

   Facoltativo): Calcolare il valor medio di $(\Delta\hat{x})^2$ e di $(\Delta\hat{p})^2$ su $|\Psi(t)\rangle$ e verificare che il risultato è coerente con il principio di indeterminazione.

   [10 punti]

3. Si consideri una particella in una buca di potenziale infinita estesa da $x = 0$ ad $x = a$ e si assuma che, al tempo $t = 0$, la particella sia stata preparata nello stato $|\Psi_0\rangle$ corrispondente alla funzione d'onda

$$\Psi_0(x) = \langle x|\Psi_0\rangle = \begin{cases} cx\sin\left[\frac{\pi x}{a}\right] & (0 \le x \le a) \\ 0 & \text{(altrimenti)} \end{cases}$$

   a): Si trovi la costante di normalizzazione c. Successivamente, si dica qual è la probabilità di ottenere, da una misura dell'energia effettuata al tempo $t = 0$, il valore $\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$;

   b): Calcolare il valor medio della coordinata $\hat{x}$ su $|\Psi_0\rangle$;

   c): Scrivere la funzione d'onda corrispondente allo stato del sistema preso al tempo t, $\Psi(x, t)$ (n.b.: È sufficiente darne un'espressione come combinazione delle autofunzioni $\psi_n(x)$ riportate in calce con opportuni coefficienti $c_n(t)$).

   [10 punti]

Formule utili:

1): Operatore di discesa dell'oscillatore armonico $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right)$;

2): Autovalori dell'energia per una particella in una buca di potenziale infinita e corrispondenti autofunzioni

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2} \;\; ; \;\; n = 1, 2, 3, \ldots \;\; , \;\; \psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left[\frac{\pi n x}{a}\right] & , \text{ per } 0 \le x \le a \\ 0 & , \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Prova scritta: introduzione alla fisica quantistica

XX settembre 2011

1. In uno spazio vettoriale a due dimensioni sia definita la base ortonormale costituita dai ket $|i\rangle$ $(i = 1, 2)$. Si definiscano gli operatori $\hat{A} = i\{|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\}$ e $\hat{B} = |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|$.

   a): Dire se $\hat{A}$ e/o $\hat{B}$ corrispondono ad una osservabile fisica e per quale motivo;

   b): Trovare autovalori ed autoket di $\hat{A}$ e di $\hat{B}$. È il risultato ottenuto coerente con la risposta al punto **a)**?;

   c): Scrivere $\hat{A}$ nella base degli autoket di $\hat{B}$.

   [10 punti]

2. Un oscillatore armonico di Hamiltoniana $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ sia stato preparato, al tempo $t = 0$, nello stato $|\Psi(0)\rangle = c\{|0\rangle + e^{i\alpha}|1\rangle\}$, con c, α costanti numeriche reali e $c > 0$.

   a): Determinare c ed α sapendo che il valor medio di $\hat{x}$ sullo stato $|\Psi(0)\rangle$ vale $\langle\Psi(0)|\hat{x}|\Psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$, mentre, al tempo $T = \pi/\omega$, si ha $\langle\Psi(T)|\hat{x}|\Psi(T)\rangle = -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$;

   b): Trovare lo stato del sistema al tempo t, $|\Psi(t)\rangle$. Successivamente, dire quali sono i valori ottenibili da una misura dell'energia effettuata al tempo t e con quale probabilità;

   c): Calcolare $\langle\Psi(t)|\hat{x}|\Psi(t)\rangle$ e $\langle\Psi(t)|\hat{p}|\Psi(t)\rangle$.

   d): [Facoltativo]: Calcolare $\langle\Psi(t)|\hat{x}^2|\Psi(t)\rangle$ e $\langle\Psi(t)|\hat{p}^2|\Psi(t)\rangle$ e, successivamente, verificare che risulta soddisfatto il principio di indeterminazione $\langle\Psi(t)|\Delta\hat{x}^2|\Psi(t)\rangle\ \langle\Psi(t)|\Delta\hat{p}^2|\Psi(t)\rangle \geq \hbar^2/4$.

   [10 punti]

3. Si consideri una particella in una buca di potenziale infinita estesa da $x = 0$ ad $x = a$ e si assuma che, al tempo $t = 0$, la particella sia stata preparata nello stato $|\Psi_0\rangle$.

   a): Si dica quale delle due funzioni d'onda $\Psi_1(x) = c_1 \sin\left(\frac{3\pi x}{2a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$ e $\Psi_2(x) = c_2\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$, con c_1, c_2 costanti di normalizzazione, possa corrispondere alla funzione d'onda $\Psi_0(x) = \langle x|\Psi_0\rangle$. Si motivi la scelta e, successivamente, si trovi la costante di normalizzazione della funzione d'onda corretta;

   b): Si trovi lo stato del sistema al tempo t. Successivamente, si dica con quale probabilità una misura dell'energia al tempo t possa dare come risultato $E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$;

   c): Si assume che, misurando l'energia al tempo t, si sia trovato come risultato E_1. Si dica qual è lo stato del sistema al tempo $t_1 > t$ e quanto vale il valor medio di $\hat{x}$ al tempo t_1.

   [10 punti]

   Formule utili:

   1): Operatore di discesa dell'oscillatore armonico $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right)$;

   2): Autovalori dell'energia per una particella in una buca di potenziale infinita e corrispondenti autofunzioni

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad , \quad \psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left[\frac{\pi n x}{a}\right] & , \text{ per } 0 \leq x \leq a \\ 0 & , \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Prova scritta: introduzione alla fisica quantistica

19 luglio 2011

1. In uno spazio vettoriale a tre dimensioni sia definita la base ortonormale costituita dai ket $|i\rangle$ ($i = 1, 2, 3$). Si definiscano gli operatori $\hat{A} = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 3| + |2\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 1|$ e $\hat{B} = i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 3| - i|2\rangle\langle 1| - i|3\rangle\langle 1|$.

   a): Dire se $\hat{A}$ e/o $\hat{B}$ corrispondono ad una osservabile fisica e per quale motivo;

   b): Trovare autovalori ed autoket di $\hat{A}$;

   c): Verificare se esista almeno un autovettore di $\hat{A}$ (e, in caso affermativo, specificare quale) che sia autovettore anche di $\hat{B}$. È possibile prevedere la risposta conoscendo il commutatore $[\hat{A}, \hat{B}]$?;

   d): [**Facoltativo**]: Trovare autovalori ed autoket di $\hat{B}$ e, successivamente, scrivere $\hat{A}$ nella base degli autoket di $\hat{B}$.

   [10 punti]

2. Un oscillatore armonico di Hamiltoniana $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ sia stato preparato, al tempo $t = 0$, nello stato $|\Psi(0)\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, con α, β costanti numeriche.

   a): Determinare α e β sapendo che esse sono entrambe reali, che il valor medio dell'energia al tempo $t = 0$ è pari a $\hbar\omega$, che una misura di $\hat{x}$ al tempo $t = 0$ dà come risultato $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$;

   b): Trovare lo stato del sistema al tempo t, $|\Psi(t)\rangle$. Successivamente, dire quali sono i valori ottenibili da una misura dell'energia effettuata al tempo t e con quale probabilità;

   c): Calcolare $\langle\Psi(t)|\hat{x}|\Psi(t)\rangle$ e $\langle\Psi(t)|\hat{p}|\Psi(t)\rangle$.

   [10 punti]

3. Si consideri una particella in una buca di potenziale infinita estesa da $x = 0$ ad $x = a$ e si assuma che, al tempo $t = 0$, la particella sia stata preparata nello stato $|\Psi_0\rangle$ corrispondente alla funzione d'onda

$$\Psi_0(x) = \langle x|\Psi_0\rangle = \begin{cases} c & (\frac{a}{4} \leq x \leq \frac{a}{2}) \\ 0 & (\text{altrimenti}) \end{cases}$$

   a): Si trovi la costante di normalizzazione c. Successivamente, si calcoli lo stato del sistema al tempo t, $|\Psi(t)\rangle$;

   b): Si dica quali risultati si possono ottenere da una misura dell'energia effettuata al tempo t e con quale probabilità;

   c): Dire se esiste un intervallo di tempo T tale che si abbia $|\Psi(t+T)\rangle = |\Psi(t)\rangle$. In caso di risposta affermativa, dare l'espressione esplicita di T.

   [10 punti]

Formule utili:

1): Operatore di discesa dell'oscillatore armonico $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right)$;

2): Autovalori dell'energia per una particella in una buca di potenziale infinita e corrispondenti autofunzioni

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2} \;\; ; \;\; n = 1, 2, 3, \dots \;\; , \; \psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left[\frac{\pi n x}{a}\right] & , \text{ per } 0 \leq x \leq a \\ 0 & , \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Prova scritta: introduzione alla fisica quantistica

15 giugno 2011

1. Siano $|i\rangle$ $(i = 1, 2)$ i ket di una base ortonormale in uno spazio a due dimensioni. Si definiscano gli operatori $\hat{X}^+ = |2\rangle\langle 1|$ e $\hat{X}^- = |1\rangle\langle 2|$. Sia definito $\hat{X}(\alpha_+, \alpha_-) = \alpha_+ \hat{X}^+ + \alpha_- \hat{X}^-$, con α_+, α_- numeri complessi:

   a): Dire quale relazione debba intercorrere tra α_+ ed α_- perché $\hat{X}(\alpha_+, \alpha_-)$ possa corrispondere ad un'osservabile fisica;

   b): Avendo determinato α_+ ed α_- come richiesto al punto **a**), trovare autovalori ed autoket di $\hat{X}(\alpha_+, \alpha_-)$;

   c): Dire se esistono scelte di α_+ ed α_- per le quali $\hat{X}(\alpha_+, \alpha_-)$ risulti unitario. In caso affermativo, fornirne almeno un esempio e determinare gli autovalori ed autovettori di $\hat{X}$.

   [10 punti]

2. Un oscillatore armonico di Hamiltoniana $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ sia stato preparato, al tempo $t = 0$, nello stato $|\Psi(0)\rangle = c\{\hat{p}^2/(\hbar m\omega)|0\rangle + |1\rangle\}$, con c costante di normalizzazione e $\hat{p}$ operatore impulso.

   a): Determinare la costante di normalizzazione c e, successivamente, trovare lo stato del sistema al tempo t, $|\Psi(t)\rangle$. Verificare se esista un periodo T tale che $|\Psi(t+T)\rangle = |\Psi(t)\rangle$ e, in caso di risposta affermativa, trovare T;

   b): Dire qual è la probabilità che, al tempo t, una misura dell'energia dia uno dei seguenti valori: $\frac{\hbar\omega}{2}$, $\frac{3\hbar\omega}{2}$, $\frac{5\hbar\omega}{2}$, $\frac{7\hbar\omega}{2}$, $\hbar\omega$;

   c): Calcolare $\langle\Psi(t)|\hat{x}|\Psi(t)\rangle$ e $\langle\Psi(t)|\hat{p}|\Psi(t)\rangle$;

   d): [Facoltativo]: Calcolare $\langle\Psi(t)|(\Delta\hat{x})^2|\Psi(t)\rangle$ e $\langle\Psi(t)|(\Delta\hat{p})^2|\Psi(t)\rangle$ e verificare che, ad ogni tempo t, il risultato rispetta il principio di indeterminazione $\langle\Psi(t)|(\Delta\hat{x})^2|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|(\Delta\hat{p})^2|\Psi(t)\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$.

   [10 punti]

3. Si consideri una particella in una buca di potenziale infinita estesa da $x = 0$ ad $x = a$ e si assuma che, al tempo $t = 0$, la particella sia stata preparata nello stato $\Psi_0\rangle$ corrispondente alla funzione d'onda

$$\Psi_0(x) = \langle x|\Psi_0\rangle = \begin{cases} c\left\{\sin\left[\frac{2\pi x}{a}\right] + 2\sin\left[\frac{4\pi x}{a}\right]\right\} & (0 \leq x \leq a) \\ 0 \quad (\text{altrimenti}) \end{cases}$$

   a): Si trovi la costante di normalizzazione c. Successivamente, si calcoli lo stato del sistema al tempo t, $|\Psi(t)\rangle$;

   b): Si dica quali risultati si possono ottenere da una misura dell'energia effettuata al tempo t e con quale probabilità;

   c): Si calcoli$\langle\Psi(t)|\hat{x}|\Psi(t)\rangle$.

   [10 punti]

Formule utili:

1): Operatore di discesa dell'oscillatore armonico $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right)$;

2): Autovalori dell'energia per una particella in una buca di potenziale infinita e corrispondenti autofunzioni

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad , \; \psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left[\frac{\pi n x}{a}\right] & , \text{ per } 0 \leq x \leq a \\ 0 & , \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Prova scritta: introduzione alla fisica quantistica

Marzo 2011

1. Siano $|i\rangle$ $(i = 1, 2)$ i ket di una base ortonormale in uno spazio a due dimensioni e sia dato l'operatore $\hat{X}(a, b) = a\sigma^x + b\sigma^y$, con $\sigma^x = |2\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2|$, $\sigma^y = i[-|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|]$ ed a, b numeri complessi:

   a): Dire quale relazione debba intercorrere tra a e b perché $X[a, b]$ possa corrispondere ad un'osservabile fisica;

   b): Scelti a e b in modo che $X[a, b]$ soddisfi la condizione richiesta al punto **a**), trovare autovalori ed autoket di $X[a, b]$;

   c): Per due scelte differenti dei coefficienti, a, b e c, d, calcolare il commutatore $[\hat{X}(a, b), \hat{X}(c, d)]$ e dire quali condizioni debbano soddisfare a, b, c, d perché si abbia $[\hat{X}(a, b), \hat{X}(c, d)] = 0$.

   [10 punti]

2. Un oscillatore armonico di Hamiltoniana $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ sia stato preparato, al tempo $t = 0$, nello stato $|\Psi(0)\rangle = c\{\alpha|0\rangle + \hat{p}|1\rangle\}$, con c costante di normalizzazione, $\hat{p}$ operatore impulso ed α reale e positivo:

   a): Determinare la costante di normalizzazione c e, successivamente, trovare lo stato del sistema al tempo t, $|\Psi(t)\rangle$;

   b): Dire quali sono i valori ottenibili da una misura dell'energia effettuata al tempo t e con quale probabilità; successivamente, usare il risultato ottenuto per determinare il valor medio dell'energia al tempo t;

   c): Calcolare $\langle\Psi(t)|\hat{x}|\Psi(t)\rangle$ e $\langle\Psi(t)|\hat{p}|\Psi(t)\rangle$;

   d): [Facoltativo]: Calcolare $\langle\Psi(t)|(\Delta\hat{x})^2|\Psi(t)\rangle$ e $\langle\Psi(t)|(\Delta\hat{p})^2|\Psi(t)\rangle$ e verificare che, ad ogni tempo t, il risultato rispetta il principio di indeterminazione $\langle\Psi(t)|(\Delta\hat{x})^2|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|(\Delta\hat{p})^2|\Psi(t)\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$.

   [10 punti]

3. Si consideri una particella in una buca di potenziale infinita estesa da $x = 0$ ad $x = a$ e si assuma che, al tempo $t = 0$, la particella sia stata preparata nello stato $\Psi_0\rangle$ corrispondente alla funzione d'onda

$$\Psi_0(x) = \langle x|\Psi_0\rangle = \begin{cases} cx(a - x) & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (\text{altrimenti}) \end{cases}$$

   a): Si trovi la costante di normalizzazione c;

   b): Si dica quali risultati si possono ottenere da una misura dell'energia al tempo $t = 0$ e con quale probabilità;

   c): Si determini lo stato del sistema al tempo t e si trovi qual è il minimo intervallo di tempo T tale che, per $t = T$, ci si aspetta di ottenere lo stesso stato che si ha per $t = 0$.

   [10 punti]

Formule utili:

1): Operatore di discesa dell'oscillatore armonico $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right)$;

2): Autovalori dell'energia per una particella in una buca di potenziale infinita e corrispondenti autofunzioni

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad , \quad \psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left[\frac{\pi n x}{a}\right] & , \text{ per } 0 \leq x \leq a \\ 0 & , \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Appello staordinario: introduzione alla fisica quantistica
Prova scritta

17 novembre 2010

1. Siano $|i\rangle$ $(i = 1, 2, 3)$ i ket di una base ortonormale in uno spazio a tre dimensioni e sia dato l'operatore $\hat{T}_\alpha$ definito come $\hat{T}_\alpha = \alpha\{|2\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 2|\} - \alpha\{|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 3|\}$, con α numero complesso:

   a): Dire come deve essere preso α perché $\hat{T}_\alpha$ sia hermitiano (e diverso dall'operatore identicamente nullo). Scelto α in modo che l'operatore soddisfi le condizioni sopra elencate, trovare autovalori ed autoket di $\hat{T}_\alpha$;

   b): Si consideri l'operatore $\hat{S} = |1\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1|$. Se ne determinino autovalori ed autoket;

   c): Avendo scelto α come al punto **a)**, dire, sulla base delle risposte date ai punti **a)** e **b)**, se, per qualche valore di tale parametro, $\hat{T}_\alpha$ ed $\hat{S}$ ammettano autoket comuni. Era possibile prevedere il risultato senza diagonalizzare gli operatori?

   [10 punti]

2. Un oscillatore armonico di Hamiltoniana $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ sia stato preparato, al tempo $t = 0$, nello stato $|\Psi(0)\rangle = c\left\{1 + \frac{\hat{p}^2}{4\hbar m\omega}\right\}|0\rangle$, con c costante di normalizzazione, $\hat{p}$ operatore impulso:

   a): Determinare la costante di normalizzazione c e, successivamente, trovare lo stato del sistema al tempo t, $|\Psi(t)\rangle$;

   b): Dire quali sono i valori ottenibili da una misura dell'energia effettuata al tempo t e con quale probabilità; successivamente, usare il risultato ottenuto per determinare il valor medio dell'energia al tempo t;

   c): Calcolare $\langle\Psi(t)|(\Delta\hat{x})^2|\Psi(t)\rangle$ e $\langle\Psi(t)|(\Delta\hat{p})^2|\Psi(t)\rangle$ e verificare che, ad ogni tempo t, il risultato rispetta il principio di indeterminazione $\langle\Psi(t)|(\Delta\hat{x})^2|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|(\Delta\hat{p})^2|\Psi(t)\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$.

   [10 punti]

3. Si consideri una particella in una buca di potenziale infinita estesa da $x = 0$ ad $x = a$ e si assuma che, al tempo $t = 0$, la particella sia stata preparata nello stato $|\Psi_0\rangle$ corrispondente alla funzione d'onda

$$\Psi_0(x) = \langle x|\Psi_0\rangle = \begin{cases} c\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (\text{altrimenti}) \end{cases}$$

   a): Si trovi la costante di normalizzazione c. Successivamente, si determini il valor medio dell'energia sullo stato $|\Psi_0\rangle$;

   b): Si trovi la funzione d'onda del sistema al tempo t, $\Psi(x, t)$. Dal risultato ottenuto si calcoli il valor medio di $\hat{x}$ e di $\hat{p}$ su $|\Psi_0\rangle$ al tempo t;

   c): Dire qual è la probabilità di trovare la particella, a $t = 0$, a sinistra di $x = a/2$ e qual è la probabilità di trovarla a destra. Qual è il minimo intervallo di tempo T tale che, per $t = T$, ci si aspetta di ottenere lo stesso risultato che per $t = 0$?

   [10 punti]

Formule utili:

1): Operatore di discesa dell'oscillatore armonico $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right)$;

2): Autovalori dell'energia per una particella in una buca di potenziale infinita e corrispondenti autofunzioni

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad , \quad \psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left[\frac{\pi n x}{a}\right] & , \text{ per } 0 \leq x \leq a \\ 0 & , \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Prova scritta: introduzione alla fisica quantistica

20 Settembre 2010

1. Siano $|i\rangle$ $(i = 1, 2)$ i ket di una base ortonormale in uno spazio a due dimensioni e sia dato l'operatore $\hat{X}(a,b) = a\sigma^+ + b\sigma^-$, con $\sigma^+ = |2\rangle\langle 1|$, $\sigma^- = |1\rangle\langle 2|$ ed a, b numeri complessi:

   a): Per due scelte differenti dei coefficienti, a, b e c, d, calcolare il commutatore $[\hat{X}(a,b), \hat{X}(c,d)]$. Esiste una relazione tra i vari coefficienti che sia non banale (cioè, con coefficienti non tutti nulli e con $a \neq c; b \neq d$) per cui $[\hat{X}(a,b), \hat{X}(c,d)] = 0$?;

   b): Dire quale relazione debba intercorrere tra a e b perché $X[a,b]$ possa corrispondere ad un'osservabile fisica;

   c): Scelti a e b in modo che soddisfino la relazione richiesta al punto **b**), trovare autovalori ed autoket di $X[a,b]$.

   [10 punti]

2. Un oscillatore armonico di Hamiltoniana $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ sia stato preparato, al tempo $t = 0$, nello stato $|\Psi(0)\rangle = c\{|0\rangle + \alpha\hat{x}|1\rangle\}$, con c costante di normalizzazione, $\hat{x}$ operatore coordinata ed α reale e positivo:

   a): Determinare la costante di normalizzazione c e, successivamente, trovare lo stato del sistema al tempo t, $|\Psi(t)\rangle$;

   b): Dire quali sono i valori ottenibili da una misura dell'energia effettuata al tempo t e con quale probabilità; successivamente, usare il risultato ottenuto per determinare il valor medio dell'energia al tempo t;

   c): Calcolare $\langle\Psi(t)|(\Delta\hat{x})^2|\Psi(t)\rangle$ e $\langle\Psi(t)|(\Delta\hat{p})^2|\Psi(t)\rangle$ e verificare che, ad ogni tempo t, il risultato rispetta il principio di indeterminazione $\langle\Psi(t)|(\Delta\hat{x})^2|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|(\Delta\hat{p})^2|\Psi(t)\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$.

   [10 punti]

3. Si consideri una particella in una buca di potenziale infinita estesa da $x = 0$ ad $x = a$ e si assuma che, al tempo $t = 0$, la particella sia stata preparata nello stato $\Psi_0\rangle$ corrispondente alla funzione d'onda

$$\Psi_0(x) = \langle x|\Psi_0\rangle = \begin{cases} c & (a/4 \leq x \leq a/2) \\ 0 & (\text{altrimenti}) \end{cases}$$

   a): Si trovi la costante di normalizzazione c. Successivamente, si determinino il valor medio di $\hat{x}$ e di $\hat{x}^2$ su $|\Psi_0\rangle$;

   b): Si trovi la funzione d'onda del sistema al tempo t, $\Psi(x,t)$, come sovrapposizione delle autofunzioni di una particella quantistica in una buca di potenziale monodimensionale a pareti infinite, $\psi_n(x)$. Dal risultato ottenuto, dire quali sono i possibili valori che si possono ottenere da una misura dell'energia effettuata al tempo t e con quale probabilità;

   c): Dire qual è la probabilità di trovare la particella, a $t = 0$, a sinistra di $x = a/4$, tra $x = a/4$ ed $x = a/2$ ed a destra di $x = a/2$. Qual è il minimo intervallo di tempo T tale che, per $t = T$, ci si aspetta di ottenere lo stesso risultato che per $t = 0$?

   [10 punti]

Formule utili:

1): Operatore di discesa dell'oscillatore armonico $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right)$;

2): Autovalori dell'energia per una particella in una buca di potenziale infinita e corrispondenti autofunzioni

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad , \psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left[\frac{\pi n x}{a}\right] & , \ \text{per } 0 \leq x \leq a \\ 0 & , \ \text{altrimenti} \end{cases}$$

Seconda prova scritta: introduzione alla fisica quantistica

20 Luglio 2010

1. Siano date le matrici 3×3 $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ che, in una base ortonormale $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$, siano rappresentate da

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad .$$

   Sia $\mathbf{T}_{a,b} = a\mathbf{T}_1 + b\mathbf{T}_2$, con a, b numeri complessi:

   a): Dire come debbono essere scelti a e b perché la matrice $\mathbf{T}_{a,b}$ sia hermitiana;

   b): Fissati a, b come richiesto al punto **a**), determinare autovalori ed autoket di $\mathbf{T}_{a,b}$.

   [10 punti]

2. Un oscillatore armonico di Hamiltoniana $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ sia stato preparato, al tempo $t = 0$, nello stato $|\Psi(0)\rangle = c_0|0\rangle + c_2|2\rangle$, con c_0 e c_2 reali e positivi:

   a): Determinare c_0 e c_2 sapendo che il valor medio dell'energia sullo stato $|\Psi(0)\rangle$ è $\bar{E} = \frac{11}{6}\hbar\omega$;

   b): Trovare lo stato del sistema al tempo t, $|\Psi(t)\rangle$ e calcolare il valor medio di coordinata $\hat{x}$ ed impulso $\hat{p}$ su $|\Psi(t)\rangle$;

   c): Calcolare il valor medio di $\hat{x}^2$ e di $\hat{p}^2$ su $|\Psi(t)\rangle$ ed utilizzare il risultato per verificare il principio di indeterminazione.

   [10 punti]

3. Si consideri una particella in una buca di potenziale infinita estesa da $x = 0$ ad $x = a$ e si assuma che, al tempo $t = 0$, la particella sia stata preparata nello stato $|\Psi(0)\rangle$ corrispondente alla funzione d'onda $\Psi_0(x) = \langle x|\Psi(0)\rangle$, data da

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} c & \text{per } a/4 \leq x \leq 3a/4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   a): Trovare la corretta normalizzazione dello stato (c);

   b): Trovare quali valori si possono ottenere da una misura dell'energia al tempo 0 e con quali probabilità;

   c): Trovare la funzione d'onda corrispondente allo stato del sistema al tempo t, $\Psi(x, t)$;

   d): Si supponga che una misura dell'energia effettuata all'istante di tempo $t_0 > 0$ abbia dato il risultato $E = E_2$. Qual è la funzione d'onda del sistema al tempo $t_1 > t_0$?.

   [10 punti]

Formule utili:

1): Operatore di discesa dell'oscillatore armonico $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right)$;

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2} \quad ; \; n = 1, 2, 3, \ldots \;\; , \; \psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left[\frac{\pi n x}{a}\right] & , \;\; \text{per } 0 \le x \le a \\ 0 & , \;\; \text{altrimenti} \end{cases}$$

Prima prova scritta: introduzione alla fisica quantistica

14 Giugno 2010

1. Siano $|i\rangle$ $(i = 1, 2, 3)$ i ket di una base ortonormale in uno spazio a tre dimensioni e siano dati gli operatori $\hat{A} = \sum_{i,j=1}^{3} A_{i,j} |i\rangle\langle j|$ e $\hat{B} = \sum_{i,j=1}^{3} B_{i,j} |i\rangle\langle j|$, con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a): Calcolare direttamente il commutatore $C = [A, B]$ ed esprimerlo come combinazione degli operatori $|i\rangle\langle j|$ $(i, j = 1, 2, 3)$;

b): Sulla base del risultato al punto a), dire se ci si aspetta che A e B ammettano una base di autoket in comune, oppure no. Successivamente, trovare eventuali autoket in comune.

[8 punti]

2. Un oscillatore armonico di Hamiltoniana $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ sia stato preparato, al tempo $t = 0$, nello stato $|\Psi(0)\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$, con c_0 reale e positivo:

a): Determinare c_0 e c_1 sapendo il valor medio di $\hat{p}$ al tempo 0, $\langle\Psi(0)|\hat{p}|\Psi(0)\rangle$ è il massimo possibile (**suggerimento**: porre $c_1 = |c_1|e^{i\varphi}$);

b): Trovare lo stato del sistema al tempo t, $|\Psi(t)\rangle$ e l'energia media $\langle\Psi(t)|\hat{H}|\Psi(t)\rangle$;

c): Calcolare $\langle\Psi(t)|(\Delta\hat{x})^2|\Psi(t)\rangle$ e $\langle\Psi(t)|(\Delta\hat{p})^2|\Psi(t)\rangle$ e verificare che, ad ogni tempo t, il risultato rispetta il principio di indeterminazione $\langle\Psi(t)|(\Delta\hat{x})^2|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|(\Delta\hat{p})^2|\Psi(t)\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$.

[12 punti]

3. Si consideri una particella in una buca di potenziale infinita estesa da $x = 0$ ad $x = a$.

a): Si considerino i ket $|\Psi\rangle_1, |\Psi\rangle_2, |\Psi\rangle_3$ corrispondenti alle funzioni d'onda:

$$\Psi_1(x) = \langle x|\Psi\rangle_1 = A\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \ , \ \Psi_2(x) = \langle x|\Psi\rangle_2 = Be^{-\frac{x^2}{2a^2}} \ , \ \Psi_3(x) = \langle x|\Psi\rangle_3 = C\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \ ,$$

con A, B, C costanti di normalizzazione. Dire, motivando la scelta, quale dei tre può rappresentare lo stato della particella al tempo 0, $|\Psi(0)\rangle$. Successivamente, normalizzare la corrispondente funzione d'onda $\Psi_0(x) = \langle x|\Psi(0)\rangle$;

b): Trovare la funzione d'onda corrispondente allo stato del sistema al tempo t, $\Psi(x, t)$;

c): Dire quali sono i possibili valori che si possono ottenere da una misura dell'energia al tempo t e con quali probabilità;

d): (Facoltativo) Trovare il valor medio di $\hat{x}$ al tempo t, $\langle\Psi(t)|\hat{x}|\Psi(t)\rangle$.

[10 punti]

2): Autovalori dell'energia per una particella in una buca di potenziale infinita e corrispondenti autofunzioni

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2} \quad ; \; n = 1, 2, 3, \ldots \quad , \; \psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left[\frac{\pi n x}{a}\right] & , \; \text{per } 0 \le x \le a \\ 0 & , \; \text{altrimenti} \end{cases}$$

Prova scritta: appello straordinario
Introduzione alla Fisica Quantistica

13 Aprile 2010

Parte prima

1. Si consideri un fotone di frequenza $\nu = 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$:

   a): Trovare l'energia del fotone, E_γ, ed il suo impulso, k_γ;

   b): Si considerino quattro metalli con potenziale di estrazione A rispettivamente pari ad 0.5 eV, 2.5 eV, 4.5 eV e 5.5 eV. Dire incidendo su quale (o quali) di questi metalli il fotone può indurre effetto fotoelettrico.

   c): Calcolare, nei casi in cui venga indotto effetto fotoelettrico, l'energia cinetica del fotoelettrone emesso.

2. Un fascio di fotoni, tutti di lunghezza d'onda λ_i, viene fatto collidere con elettroni in quiete.

   a): Sapendo che i fotoni rilevati ad angolo di diffusione $\varphi = \pi$ hanno lunghezza d'onda $\lambda_f^{(1)} = 3.0 \times 10^{-11}$m, calcolare λ_i.

   b): Calcolare la lunghezza d'onda finale dei fotoni diffusi a $\varphi = \pi/2$ ed a $\varphi = \pi/3$.

3. Si consideri la funzione $\Psi(x) = c\, x e^{-\lambda x^2}$, con λ reale:

   a): Dire per quale insieme di valori di λ $\Psi(x)$ può rappresentare la funzione d'onda di una particella quantistica;

   (**b):** Scelto λ in accordo al punto **a**, dire quanto vale la probabilità che una misura della posizione dia come risultato $x = 0$;

   c): Trovare il coefficiente di normalizzazione c.

4. (Facoltativo): Calcolare il valor medio di $\hat{x}$ sulla funzione d'onda $\Psi(x)$.

Parte seconda

Si consideri una particella in una buca monodimensionale infinita definita da $0 \leq x \leq a$. Si supponga che, al tempo $t = 0$, la particella sia preparata nello stato descritto dalla funzione d'onda $\Psi_0(x)$, data da

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} c\left\{\sin\left[\frac{\pi x}{a}\right] + \sin\left[\frac{2\pi x}{a}\right]\right\} & , \text{ per } 0 \leq x \leq a \\ 0 & , \text{ altrimenti} \end{cases} ,$$

con c costante di normalizzazione.

1. Confrontando $\Psi_0(x)$ con le autofunzioni $\psi_n(x)$ riportate in calce al problema, dire quali sono i valori che si possono ottenere da una misura dell'energia della particella;

2. Trovare la costante di normalizzazione c;

3. Trovare la funzione d'onda della particella al tempo t, $\Psi(x, t)$;

4. Scelta la funzione d'onda $\Psi_0(x)$, determinarne la corretta normalizzazione (c);

5. Valutare la probabilità con la quale si può ottenere ciascuno dei possibili valori di una misura dell'energia.

Nota bene: Gli autovalori dell'energia per la buca di potenziale infinita in una dimensione sono dati da

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2ma^2} \quad ; \; n = 1, 2, 3, \ldots \quad .$$

Le corrispondenti autofunzioni sono date da

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left[\frac{\pi n x}{a}\right] & , \text{ per } 0 \leq x \leq a \\ 0 & , \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Prova scritta: appello straordinario
Introduzione alla Fisica Quantistica

17 Novembre 2009

Parte prima

1. Un fotone di frequenza angolare ω, con $\omega = 9.6 \times 10^{14}\,\mathrm{s}^{-1}$ ha energia $E_\gamma = 3\hbar\omega/2$.

   a): Trovare E_γ;

   b): Si supponga di far incidere il fotone su due metalli, con potenziale di estrazione A rispettivamente pari ad 1 eV ed a 4 eV. Dire incidendo su quale (o quali) di questi metalli il fotone può indurre effetto fotoelettrico;

   c): Calcolare, nei casi in cui venga indotto effetto fotoelettrico, l'energia cinetica del fotoelettrone emesso.

2. Un atomo di idrogeno ($Z = 1$) si diseccita transendo dal livello con $n = 2$ al livello con $n = 1$ emettendo un fotone di energia ϵ:

   a): Trovare ϵ;

   b): Rispondere ai punti **b)**: e **c)**: del problema precedente per un fotone di energia ϵ (invece che E_γ).

3. Si consideri la funzione $\Psi(x) = c\, e^{-a(x-x_0)^2}$, con a ed x_0 reali, $a > 0$:

   a): Trovare il coefficiente di normalizzazione c;

   b): Trovare il valor medio di $\hat{x}$ sullo stato descritto da $\Psi(x)$;

   c): Trovare il valor medio di $\hat{p}$ sullo stato descritto da $\Psi(x)$;

4. (Facoltativo): Calcolare il valor medio di $\hat{x}^2$ e $\hat{p}^2$ sulla funzione d'onda $\Psi(x)$. Usare il risultato trovato per verificare il principio di indeterminazione $(\Delta x)^2(\Delta p)^2 \geq \hbar^2/4$.

Parte seconda

Si consideri una particella in una buca monodimensionale infinita definita da $0 \le x \le a$. Si supponga che, al tempo $t = 0$, la particella sia preparata nello stato descritto dalla funzione d'onda $\Psi_0(x)$, data da

$$\Psi_0(x) = c\left\{\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right\} \quad ,$$

1. Determinare la corretta normalizzazione di $\Psi_0(x)$ scelta in questo modo;
2. Trovare lo stato del sistema al tempo t, $\Psi(x;t)$;
3. Dire quali sono i valori che si possono ottenere da una misura dell'energia effettuata al tempo $t_1 > 0$ e con quale probabilità.
4. (Facoltativo): Calcolare il valor medio di $\hat{p}$ al tempo t.

Nota bene: Gli autovalori dell'energia per la buca di potenziale infinita in una dimensione sono dati da

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2} \quad ; \; n = 1, 2, 3, \ldots \quad .$$

Le corrispondenti autofunzioni sono date da

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left[\frac{\pi n x}{a}\right] & , \text{ per } 0 \le x \le a \\ 0 & , \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Seconda prova scritta di recupero: Introduzione alla Fisica Quantistica

Settembre 2009

Parte prima

1. **[3.5 punti]** Un metallo con potenziale di estrazione $A = 4$ eV viene investito da luce di lunghezza d'onda λ, producendo effetto fotoelettrico.

   a): Determinare, in funzione di λ, l'energia dei fotoelettroni emessi;

   b): Si assuma che il fotoelettrone collida con un atomo idrogenoide con numero atomico Z. Si calcoli come deve essere fissata λ in funzione di Z perché esso abbia l'energia di soglia per eccitare una transizione dallo stato fondamentale, n=1, al primo stato eccitato, n=2.

2. **[3.5 punti]** Un fascio di fotoni, tutti di lunghezza d'onda λ_i, viene fatto collidere con mesoni μ in quiete (di massa a riposo $m_\mu \approx 206 m_e$).

   a): Sapendo che i fotoni rilevati ad angolo di diffusione $\varphi = \pi/3$ hanno lunghezza d'onda $\lambda_f^{(1)} = 1.2 \times 10^{-13}$m, calcolare λ_i.

   b): Calcolare la lunghezza d'onda finale dei fotoni diffusi a $\varphi = 0$, a $\varphi = \pi/4$ ed a $\varphi = \pi$.

3. **[8 punti]** Una particella quantistica in una dimensione si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda (in rappresentazione degli impulsi)

   $$\phi(p) = c e^{-\frac{a}{2}p^2 + ibp} \qquad ,$$

   con $a, b > 0$.

   a): Calcolare la costante di normalizzazione c;

   b): Calcolare il valor medio di coordinata ed impulso su tale stato, $\langle \hat{x} \rangle$ e $\langle \hat{p} \rangle$;

   c): Calcolare il valor medio quadratico di coordinata ed impulso su tale stato, $\langle \hat{x}^2 \rangle$ e $\langle \hat{p}^2 \rangle$ e verificare il principio di indeterminazione $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, con $\Delta x = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2}$ e $\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}$.

4. (Facoltativo): Assumendo che $\phi(p)$ alla domanda 3) descriva lo stato di un oscillatore armonico monodimensionale, di Hamiltoniana $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$, calcolarne l'energia media.

Parte seconda

Si consideri una particella in una buca monodimensionale infinita definita da $0 \leq x \leq a$. Si supponga che, al tempo $t = 0$, la particella sia preparata nello stato descritto dalla funzione d'onda $\Psi_0(x)$, data da

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} c \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) & , \quad (0 \leq x \leq a) \\ 0 & , \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. **[5 punti]** Dire perché $\Psi_0(x)$ è una funzione d'onda ammissibile per il problema considerato. Successivamente, determinarne la corretta normalizzazione (c);

2. **[5 punti]** Trovare lo stato del sistema al tempo t, $\Psi(x;t)$ e calcolare i valori che si possono ottenere da una misura dell'energia effettuata al tempo $t_1 > 0$, con le relative probabilità;

3. **[5 punti]** Calcolare il valor medio di $\hat{x}$ al tempo $t = 0$.

4. (Facoltativo) Calcolare il valor medio di $\hat{x}$ al tempo $t_1 > 0$.

Nota bene: Gli autovalori dell'energia per la buca di potenziale infinita in una dimensione sono dati da

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad .$$

Le corrispondenti autofunzioni sono date da

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left[\frac{\pi n x}{a}\right] & , \quad \text{per } 0 \leq x \leq a \\ 0 & , \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

Prima prova di recupero: Introduzione alla Fisica Quantistica

20 Luglio 2009

Parte prima

1. Una fascio di particelle di massa m e velocità v_x lungo l'asse x incide su di una fenditura disposta ortogonalmente al moto delle particelle stesse e di ampiezza d

   a): spiegare perché ci si aspetta un allargamento angolare del fascio, con angolo θ, al passaggio attraverso la fenditura;

   b): Stimare θ.

2. Un fascio di fotoni, tutti di lunghezza d'onda λ_i, viene fatto collidere con protoni in quiete.

   a): Sapendo che i fotoni rilevati ad angolo di diffusione $\varphi = \pi/2$ hanno lunghezza d'onda $\lambda_f^{(1)} = 0.75 \times 10^{-14}$m, calcolare λ_i.

   b): Calcolare la lunghezza d'onda finale dei fotoni diffusi a $\varphi = 0$, a $\varphi = \pi/4$ ed a $\varphi = \pi$.

3. Una particella quantistica in una dimensione si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda (in rappresentazione degli impulsi)

$$\phi(p) = ce^{\frac{ipx_0}{\hbar}}\, e^{-\frac{p^2}{2\Delta^2}} \quad ,$$

   con x_0 e Δ numero reali e $\Delta > 0$.

   a): Calcolare la costante di normalizzazione c;

   b): Calcolare il valor medio di coordinata ed impulso su tale stato, $\langle \hat{x} \rangle$ e $\langle \hat{p} \rangle$;

   c): Calcolare il valor medio quadratico di coordinata ed impulso su tale stato, $\langle \hat{x}^2 \rangle$ e $\langle \hat{p}^2 \rangle$ e verificare il principio di indeterminazione $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, con $\Delta x = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2}$ e $\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}$.

4. (Facoltativo): Assumendo che $\psi(x)$ alla domanda 3) descriva uno stato dell'oscillatore armonico monodimensionale considerato nella parte seconda, calcolarne l'energia media.

Parte seconda

Si consideri un oscillatore armonico quantistico di Hamiltoniana:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema sia preparato nello stato descritto dalla funzione d'onda $\Psi_0(x)$, data da:

$$\Psi_0(x) = c(1 + \frac{m\omega}{\hbar}x^2)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

1. Determinare la corretta normalizzazione di $\Psi_0(x)$ (c);
2. Trovare lo stato del sistema al tempo t, $\Psi(x,t)$;
3. Trovare il valor medio della coordinata al tempo t, $\langle \hat{x} \rangle$;
4. Calcolare la probabilità che, al tempo $t_1 > 0$, il risultato di una misura dell'energia sia pari a $\hbar\omega/2$, a $3\hbar\omega/2$, oppure a $5\hbar\omega/2$. Assumendo di aver ottenuto $\hbar\omega/2$, dire quanto vale $\langle \hat{x} \rangle$ per $t > t_1$;
5. (Facoltativo) Sia p_0 una costante reale con le dimensioni di un impulso. Calcolare, la variare di p_0, la corrente di probabilità associata allo stato su $e^{\frac{ip_0x}{\hbar}}\Psi(x,t)$.

Nota bene: le autofunzioni dell'Hamiltoniana di un oscillatore armonico corrispondenti ad $n = 0, 1, 2$ sono rispettivamente date da:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad ; \quad \psi_1(x) = \sqrt{2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left[2\frac{m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right] e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

Prova Scritta: Introduzione alla Fisica Quantistica

23 Giugno 2009

Parte prima

1. Avendo fatto incidere luce di lunghezza d'onda λ su di un metallo con potenziale di estrazione $A = 2.4$ eV, i fotoelettroni emessi vengono accelerati passando attraverso una differenza di potenziale $\Delta V = 4$ V e poi fatti passare attraverso gas idrogeno atomico. Si assuma che gli atomi di idrogeno si trovino tutti nello stato fondamentale.

   a): Spiegare perché, al di sotto di un certo valore di λ, λ_m, ci si aspetta una netta diminuzione della corrente elettronica attraverso il gas;

   b): Stimare λ_m.

2. Un fascio di fotoni, tutti di lunghezza d'onda λ_i, viene fatto collidere con elettroni in quiete.

   a): Sapendo che i fotoni rilevati ad angolo di diffusione $\varphi = \pi/4$ hanno lunghezza d'onda $\lambda_f^{(1)} = 1.4 \times 10^{-11}$m, calcolare λ_i.

   b): Calcolare la lunghezza d'onda finale dei fotoni diffusi a $\varphi = 0$, a $\varphi = \pi/3$ ed a $\varphi = \pi$.

3. Una particella quantistica in una dimensione si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

   $$\psi(x) = c(\sqrt{a}x + 1)e^{-\frac{a}{2}x^2} \quad ,$$

   con $a > 0$.

   a): Calcolare la costante di normalizzazione c;

   b): Calcolare il valor medio di coordinata ed impulso su tale stato, $\langle \hat{x} \rangle$ e $\langle \hat{p} \rangle$;

   c): Calcolare il valor medio quadratico di coordinata ed impulso su tale stato, $\langle \hat{x}^2 \rangle$ e $\langle \hat{p}^2 \rangle$ e verificare il principio di indeterminazione $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, con $\Delta x = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2}$ e $\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}$.

4. (Facoltativo): Assumendo che $\psi(x)$ alla domanda 3) descriva lo stato di un oscillatore armonico monodimensionale, di Hamiltoniana $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$, calcolarne l'energia media.

Parte seconda

Si consideri una particella in una buca monodimensionale infinita definita da $0 \leq x \leq a$. Si supponga che, al tempo $t = 0$, la particella sia preparata nello stato descritto dalla funzione d'onda $\Psi_0(x)$, data da

$$\Psi_0(x) = c \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

1. Dire perché $\Psi_0(x)$ è una funzione d'onda ammissibile per il problema considerato. Successivamente, determinarne la corretta normalizzazione (c);

2. Trovare lo stato del sistema al tempo t, $\Psi(x;t)$;

3. Dire quali sono i valori che si possono ottenere da una misura dell'energia effettuata al tempo $t_1 > 0$ e con quale probabilità.

4. (Facoltativo): Calcolare il valor medio di $\hat{x}$ al tempo t.

Nota bene: Gli autovalori dell'energia per la buca di potenziale infinita in una dimensione sono dati da

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad .$$

Le corrispondenti autofunzioni sono date da

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left[\frac{\pi n x}{a}\right] & , \text{ per } 0 \leq x \leq a \\ 0 & , \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Appello Straordinario: Introduzione alla Fisica Quantistica

25 Marzo 2009

Parte prima

1. Un fotone di lunghezza d'onda λ incide su di un metallo con potenziale di estrazione $A = 2.0$ eV. Un elettrone viene emesso per effetto fotoelettrico e viene accelerato passando attraverso una differenza di potenziale $\Delta V = 5$ V. Dopo l'accelerazione, il fotoelettrone viene fatto collidere con un atomo di idrogeno nel suo stato fondamentale: trovare il massimo valore di λ affinché il fotoelettrone possa effettivamente ionizzare l'atomo.

2. Si considerino un elettrone, un muone ed un protone racchiusi in scatole monodimensionali di larghezza rispettivamente pari ad L_e, L_μ ed L_p. La massa del muone è circa 206 volte quella dell'elettrone, mentre quella del protone è circa 1840 volte quella dell'elettrone.

   a): Trovare quanto debbano valere i rapporti L_e/L_μ ed L_e/L_p perché il minimo valore possibile dell'energia sia lo stesso per tutte e tre le particelle;

   b): Assumendo che, posto L_e=0.1 μm, l'elettrone si trovi nello stato di energia minima, dire quali valori ci si aspetta di ottenere da una misura dell'impulso e con quale probabilità.

3. Una particella quantistica in una dimensione si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

   $$\psi(x) = c e^{-\frac{a}{2}x^2 + bx} \quad ,$$

   con $a, b > 0$.

   a): Calcolare la costante di normalizzazione c;

   b): Calcolare il valor medio di coordinata ed impulso su tale stato, $\langle \hat{x} \rangle$ e $\langle \hat{p} \rangle$;

   c): Calcolare il valor medio quadratico di coordinata ed impulso su tale stato, $\langle \hat{x}^2 \rangle$ e $\langle \hat{p}^2 \rangle$ e verificare il principio di indeterminazione $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, con $\Delta x = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2}$ e $\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}$.

4. (Facoltativo): Assumendo che $\psi(x)$ alla domanda 3) descriva lo stato di un oscillatore armonico monodimensionale, calcolarne l'energia media.

Parte seconda

Si consideri una particella in una buca monodimensionale infinita definita da $0 \le x \le a$. Si supponga che, al tempo $t = 0$, la particella sia preparata nello stato descritto dalla funzione d'onda $\Psi_0(x)$, data da

$$\Psi_0(x) = c\left\{2\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)\right\}$$

1. Determinare la corretta normalizzazione di $\Psi_0(x)$ (c);
2. Trovare lo stato del sistema al tempo t, $\Psi(x;t)$;
3. Dire quali sono i valori che si possono ottenere da una misura dell'energia effettuata al tempo $t_1 > 0$ e con quale probabilità.
4. (Facoltativo): Calcolare il valor medio di $\hat{x}$ al tempo t.

Nota bene: Gli autovalori dell'energia per la buca di potenziale infinita in una dimensione sono dati da

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2ma^2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad .$$

Le corrispondenti autofunzioni sono date da

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left[\frac{\pi n x}{a}\right] & , \text{ per } 0 \le x \le a \\ 0 & , \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Appello straordinario: Introduzione alla Fisica Quantistica

19 Novembre 2008

Parte prima

1. Si proietti luce su di un metallo. La lunghezza d'onda di soglia per indurre fotoemissione è $\lambda_S = 700$nm.

   a): Determinare il lavoro di estrazione del metallo, W;

   b): Dire qual è il massimo valore λ_M che può avere la lunghezza d'onda della radiazione incidente perché il fotoelettrone emesso possa ionizzare un atomo di idrogeno preparato nel suo stato fondamentale.

2. Un fascio di fotoni, tutti di lunghezza d'onda λ_i, viene fatto collidere su particelle di massa incognita. Sapendo che i fotoni diffusi ad angolo $\varphi = \pi$ hanno lunghezza d'onda $\lambda^\pi = 54.84 \times 10^{-12}$m e che quelli diffusi ad angolo $\varphi = \pi/2$ hanno lunghezza d'onda $\lambda^{\pi/2} = 52.42 \times 10^{-12}$m:

   a): Calcolare la massa delle particelle bersaglio (m_X);

   b): Calcolare la lunghezza d'onda iniziale dei fotoni (λ_i).

3. Una particella quantistica in una dimensione si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = c \exp\left[-\frac{x^2}{2\Delta^2} + ip_0 x\right] \quad ,$$

   con Δ, p_0 numeri reali.

   a): Calcolare la costante di normalizzazione c;

   b): Calcolare il valor medio di coordinata ed impulso su tale stato, $\langle\hat{x}\rangle$ e $\langle\hat{p}\rangle$;

   c): Calcolare il valor medio quadratico di coordinata ed impulso su tale stato, $\langle\hat{x}^2\rangle$ e $\langle\hat{p}^2\rangle$ e verificare il principio di indeterminazione $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, con $\Delta x = \sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2}$ e $\Delta p = \sqrt{\langle\hat{p}^2\rangle - \langle\hat{p}\rangle^2}$.

4. (Facoltativo): Assumendo che $\psi(x)$ alla domanda 3) descriva lo stato di un oscillatore armonico monodimensionale, calcolarne l'energia media.

Parte seconda

Una particella quantistica di massa m è vincolata a muoversi in una scatola monodimensionale di lunghezza a, vale a dire, il suo moto è limitato a $0 \leq x \leq a$. Siano date le funzioni d'onda:

$$\begin{aligned}\Psi_a(x) &= C_a \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\\ \Psi_b(x) &= C_b \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\quad .\end{aligned}$$

per $0 \leq x \leq a$, mentre $\Psi_a(x), \Psi_b(x)$ sono nulle per x esterno a tale intervallo.

1. Dire perché $\Psi_a(x), \Psi_b(x)$ sono funzioni d'onda ammissibili per la particella in una buca di potenziale infinita;
2. Determinare la corretta normalizzazione di $\Psi_a(x)$ e di $\Psi_b(x)$ (C_a, C_b);
3. Trovare gli stati al tempo t, $\Psi_a(x,t), \Psi_b(x,t)$;
4. Trovare il valor medio dell'energia $\langle E \rangle$ su entrambi gli stati;
5. (Facoltativo) Supposto che al tempo $t = 0$ la particella sia preparata nello stato descritto dalla funzione d'onda $\Psi_a(x)$, trovare come varia nel tempo la probabilità di trovare la particella nello stato $\Psi_b(x)$.

Nota bene: le autofunzioni dell'Hamiltoniana di una particella libera in una buca di potenziale $0 \leq x \leq a$ sono date da

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \quad , \quad (0 \leq x \leq a \\ \qquad = 0 \ \text{ altrimenti} \end{cases}$$

I corrispondenti autovalori dell'energia sono dati da

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}$$

Possono risultare utili, inoltre, le formule di prostaferesi dei seni:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) \quad , \quad \sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

Seconda prova di recupero: Introduzione alla Fisica Quantistica

17 Settembre 2008

Parte prima

1. Si supponga di irraggiare con luce di intensità $W = 2500\text{W/m}^2$ la vela di una navicella spaziale. Assumendo che la vela sia quadrata di lato ℓ=1 km e che la luce sia completamente assorbita dalla vela stessa

   a): trovare la forza esercitata sulla vela;

   b): descrivere il moto della navicella irraggiata come descritto;

   c): discutere come i risultati precedenti cambierebbero se la luce fosse completamente riflessa dalla vela.

   Nota bene: Si ricordi che l'intensità luminosa misura l'energia incidente sulla vela per unità di tempo e per unità di superficie, vale a dire, il numero di fotoni incidenti per unità di tempo e di superficie, moltiplicato per l'energia di ciascun fotone.

2. Un fascio di fotoni, tutti di lunghezza d'onda λ_i, viene fatto collidere con protoni in quiete.

   a): Sapendo che i fotoni rilevati ad angolo di diffusione $\varphi = \pi/4$ hanno lunghezza d'onda $\lambda_f^{(1)} = 0.70 \times 10^{-14}$m, calcolare λ_i.

   b): Calcolare la lunghezza d'onda finale dei fotoni diffusi a $\varphi = 0$, a $\varphi = \pi/2$ ed a $\varphi = \pi$.

3. Una particella quantistica in una dimensione si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = \frac{c}{x^2 + a^2} \quad ,$$

   con a numero reale.

   a): Dire per quali valori di a $\psi(x)$ è normalizzabile. Assumendo, in particolare, a reale, calcolare la costante di normalizzazione c;

   b): Calcolare il valor medio di coordinata ed impulso su tale stato, $\langle \hat{x} \rangle$ e $\langle \hat{p} \rangle$;

   c): Calcolare il valor medio quadratico di coordinata ed impulso su tale stato, $\langle \hat{x}^2 \rangle$ e $\langle \hat{p}^2 \rangle$ e verificare il principio di indeterminazione $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, con $\Delta x = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2}$ e $\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}$.

tore armonico monodimensionale, calcolarne l'energia media.

Parte seconda

Si consideri un oscillatore armonico quantistico di Hamiltoniana:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema sia preparato nello stato descritto dalla funzione d'onda $\Psi_0(x)$, data da:

$$\Psi_0(x) = c(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x + \frac{m\omega}{\hbar}x^2)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

1. Determinare la corretta normalizzazione di $\Psi_0(x)$ (c);
2. Trovare lo stato del sistema al tempo t, $\Psi(x,t)$;
3. Trovare il valor medio dell'energia, $\langle E \rangle$;
4. Calcolare la probabilità che, al tempo $t_1 > 0$, il risultato di una misura dell'energia sia pari a $\hbar\omega/2$, a $3\hbar\omega/2$, oppure a $5\hbar\omega/2$. Assumendo di aver ottenuto uno degli autovalori sopra elencati, dire qual è la parità della funzione d'onda che descrive lo stato del sistema dopo la misura dell'energia.
5. (Facoltativo) Determinare il valor medio di $\hat{x}$ e di $\hat{p}$ su $\Psi(x,t)$.

Nota bene: le autofunzioni dell'Hamiltoniana di un oscillatore armonico corrispondenti ad $n = 0, 1, 2$ sono rispettivamente date da:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad ; \quad \psi_1(x) = \sqrt{2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}xe^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left[2\frac{m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right] e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

Prima prova scritta di recupero: Introduzione alla Fisica Quantistica

15 Luglio 2008

Parte prima

1. (a) Un pallone da calcio regolamentare pesa circa 430 g. Sapendo che una porta da calcio è larga 7.32 m ed alta 2.44 m, spiegare perché, se un attaccante calcia il pallone verso la porta avversaria alla velocità di 50 km/h, il portiere può ragionevolmente trascurare effetti quantistici;

   (b) Stimare l'ordine di grandezza delle dimensioni che dovrebbe avere la porta perché gli effetti quantistici non siano più trascurabili;

   (c) Stimare la lunghezza d'onda di un fotone con energia pari all'energia di quiete dell'elettrone ($m_e c^2$, m_e essendo la massa dell'elettrone). A quale costante fisica è pari il risultato così ottenuto?

2. Un oscillatore armonico quantistico di frequenza ν può trovarsi in livelli energetici stazionari con energia $E_n = h\nu(n + 1/2)$, $n = 0, 1, 2, ...$ Si consideri un oscillatore di frequenza $\nu = 1.4 \times 10^{14}$ Hz, preparato in uno stato eccitato E_m.

   (a) Se tale oscillatore effettua una transizione da uno stato con energia E_m ad uno stato con energia $E_{m'}$, con $m > m'$, emettendo un fotone, trovare quale debba essere il minimo valore di $m - m'$, Δm_{min}, perché il fotone emesso possa indurre fotoemissione in un metallo con potenziale di estrazione $A = 2$ eV;

   (b) Posto $m - m' > \Delta m_{\text{min}}$, trovare come la velocità del fotoelettrone emesso dipende da $m - m'$;

   (c) Se, per $m - m' > \Delta m_{\text{min}}$, si vuole fermare il fotoelettrone emesso con un potenziale frenante V, trovare come varia il valore minimo che deve avere V in funzione di $m - m'$.

3. Una particella quantistica in una dimensione si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda
$$\psi(x) = \begin{cases} Cxe^{\frac{-x}{\Delta}} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{ altrimenti} \end{cases}$$
   con $\Delta > 0$.

   (a) Tracciare qualitativamente il grafico di $\psi(x)/C$.

più probabili che si possano ottenere in una misura della coordinata stessa.

(c) Calcolare la costante di normalizzazione C ed il valor medio di $\hat{x}^2$ per la funzione d'onda del punto precedente.

(d) **(Facoltativo)** : Calcolare, sulla funzione d'onda al punto precedente, il valor medio di $\hat{x}^n$, per $n = 3, 4, 5, \ldots$.

Parte seconda

Si consideri una particella in una buca monodimensionale infinita definita da $0 \le x \le a$. Si supponga che, al tempo $t = 0$, la particella sia preparata nello stato descritto dalla funzione d'onda $\Psi(x; t = 0)$, data da

$$\Psi(x; t = 0) = \begin{cases} C\left[\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right)\right] & 0 \le x \le a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

1. Scrivere $\Psi(x; t = 0)$ come combinazione lineare delle autofunzioni $\psi_n(x)$ della buca di potenziale infinita e determinare la corretta normalizzazione, C, di $\Psi(x; t = 0)$;
2. Trovare lo stato del sistema al tempo t, $\Psi(x; t)$;
3. Calcolare il valor medio dell'energia sullo stato $\Psi(x; t)$;
4. Dire qual è la probabilità che, al tempo $t_1 > 0$, una misura dell'energia dia un valore $< 3\hbar^2/ma^2$;
5. **(Facoltativo)**: Calcolare il valor medio di $\hat{x}$ sullo stato descritto dalla funzione d'onda $\Psi(x, t)$.

Nota bene: Gli autovalori dell'energia per la buca di potenziale infinita in una dimensione sono dati da

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2ma^2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad .$$

Le corrispondenti autofunzioni sono date da

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) & 0 \le x \le a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Prova scritta d'esame: Introduzione alla Fisica Quantistica

23 Giugno 2008

Parte prima

1. Due atomi d'idrogeno, entrambi preparati nel loro stato fondamentale, si muovono l'uno verso l'altro, con velocità opposte in verso, entrambe pari a v_H. Si assuma che, all'atto della loro collisione, l'energia cinetica dei due atomi possa essere convertita completamente, in un urto anelastico, in energia dello stato elettronico di uno dei due atomi.

   a): trovare qual è il valore minimo di v_H, $v_{H,\mathrm{min}}$, perché l' atomo eccitato possa essere ionizzato;

   b): Assumendo che gli elettroni ottenuti ionizzando atomi d'idrogeno in questo modo vengano accelerati da una differenza di potenziale $\Delta V = 10$ Volt, trovare come dipende la velocità v_e degli elettroni accelerati da v_H e da ΔV, per $v_H \geq v_{H,\mathrm{min}}$;

   c): Discutere cosa cambia nella dipendenza di v_e da v_H e da ΔV nel caso che la differenza di potenziale, pur avendo lo stesso valore, freni gli elettroni, invece di accelerarli.

   Nota bene: Si usi per la massa dell'atomo d'idrogeno il valore $M_H \approx 1840\ m_e$, dove m_e è la massa dell'elettrone.

2. Un fascio di fotoni, tutti di lunghezza d'onda λ_i, viene fatto collidere con elettroni in quiete.

   a): Sapendo che i fotoni rilevati ad angolo di diffusione $\varphi = \pi/4$ hanno lunghezza d'onda $\lambda_f^{(1)} = 1.40 \times 10^{-11}$m, calcolare λ_i.

   b): Calcolare la lunghezza d'onda finale dei fotoni diffusi a $\varphi = 0$, a $\varphi = \pi/2$ ed a $\varphi = \pi$.

3. Una particella quantistica in una dimensione si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = \begin{cases} cx^2(a-x)^2 & , \ \text{per } 0 \leq x \leq a \\ 0 & , \ \text{altrimenti} \end{cases}$$

   a): Calcolare la costante di normalizzazione c;

b): Calcolare il valor medio di coordinata ed impulso su tale stato, $\langle \hat{x} \rangle$ e $\langle \hat{p} \rangle$;

c): Calcolare il valor medio quadratico di coordinata ed impulso su tale stato, $\langle \hat{x}^2 \rangle$ e $\langle \hat{p}^2 \rangle$. Usare il risultato per verificare che viene soddisfatto il principio di indeterminazione $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, con $\Delta x = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2}$ e $\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}$.

4. (Facoltativo): Assumendo che $\psi(x)$ alla domanda 3) descriva una particella in una buca di potenziale monodimensionale a pareti infinite, estesa da 0 ad a, stimare l'energia media di tale particella.

Parte seconda

Si consideri un oscillatore armonico quantistico di Hamiltoniana:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema sia preparato nello stato descritto dalla funzione d'onda $\Psi_0(x)$, data da:

$$\Psi_0(x) = c(1 + \frac{m\omega}{\hbar} x^2) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

1. Determinare la corretta normalizzazione di $\Psi_0(x)$ (c);
2. Trovare lo stato del sistema al tempo t, $\Psi(x,t)$;
3. Trovare il valor medio dell'energia, $\langle E \rangle$;
4. Calcolare la probabilità che, al tempo $t_1 > 0$, il risultato di una misura dell'energia sia pari a $\hbar\omega/2$, a $3\hbar\omega/2$, oppure a $5\hbar\omega/2$.
5. (Facoltativo) Determinare il valor medio dell'energia potenziale, $\frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$, su $\Psi(x,t)$.

Nota bene: le autofunzioni dell'Hamiltoniana di un oscillatore armonico corrispondenti ad $n = 0, 1, 2$ sono rispettivamente date da:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad ; \quad \psi_1(x) = \sqrt{2} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left[2\frac{m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right] e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

Prova scritta d'esame: Introduzione alla Fisica Quantistica

12 Dicembre 2007

Parte prima

1. Un metallo con potenziale di estrazione $A = 3$ eV viene investito da radiazione elettromagnetica di frequenza ν.

   (a) Trovare il valore di soglia di ν, ν_s, al di sopra del quale la radiazione possa produrre effetto fotoelettrico.

   (b) Calcolare come l'energia del fotoelettrone emesso dipende da ν.

   (c) Calcolare l'energia dell'atomo di idrogeno nello stato con $n = 2$.

   (d) Trovare che valore deve avere ν perché il fotoelettrone emesso possegga l'energia necessaria per ionizzare l'atomo di idrogeno preparato nello stato con $n = 2$.

2. Un oscillatore armonico quantistico di frequenza $\nu = 2.4 \times 10^{14}$ Hz perde energia diseccitandosi dallo stato con $n = 9$ a quello con $n = 0$.

   (a) Calcolare la variazione di energia dell'oscillatore, ΔE.

   (b) Si assuma che l'energia ΔE venga tutta ceduta ad un secondo oscillatore di frequenza $\nu' = 3\nu$, preparato nello stato con $n_i = 0$. L'oscillatore sarà eccitato in uno stato con $n = n_f$. Trovare n_f.

3. Una particella quantistica in una dimensione si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda
$$\psi(x) = \begin{cases} Cx & , \ -a \leq x \leq a \\ 0 & , \ \text{altrimenti} \end{cases} ,$$
   con C reale.

   (a) Tracciare qualitativamente il grafico di $|\psi(x)|^2/C^2$.

   (b) Osservando il grafico tracciato al punto precedente, dedurre qual è il valor medio della coordinata $\hat{x}$ su tale stato. Valutare la probabilità che una misura della coordinata dia come risultato il valor medio di $\hat{x}$.

4. (Facoltativo): Calcolare la costante di normalizzazione C ed il valor medio di $\hat{x}^2$ per la funzione d'onda del punto precedente.

Parte seconda

Si consideri una particella in una buca monodimensionale infinita definita da $0 \leq x \leq a$. Si supponga che, al tempo $t = 0$, la particella sia preparata nello stato descritto dalla funzione d'onda $\Psi(x; t = 0)$, data da

$$\Psi(x; t = 0) = \begin{cases} C & , \ \frac{a}{2\pi} \leq x \leq \frac{a}{\pi} \\ 0 & , \ \text{altrimenti} \end{cases} \quad .$$

1. Determinare la corretta normalizzazione, C, di $\Psi(x; t = 0)$.
2. Trovare lo stato del sistema al tempo t, $\Psi(x; t)$.
3. Dire qual è la probabilità che, al tempo $t_1 > 0$, una misura dell'energia dia $\hbar^2/2ma^2$.
4. (Facoltativo): Discutere come si potrebbe derivare la funzione al tempo t, $\Psi(x, t)$.

Nota bene: Gli autovalori dell'energia per la buca di potenziale infinita in una dimensione sono dati da

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2ma^2} \quad ; \ n = 1, 2, 3, \ldots \quad .$$

Le corrispondenti autofunzioni sono date da

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Seconda prova di recupero: Introduzione alla Fisica Quantistica

18 Settembre 2007

Parte prima

1. Un oscillatore armonico quantistico di frequenza $\nu = 5\times10^{14}\mathrm{s}^{-1}$ si diseccita passando da un livello con $n = n_i$ ad un livello con $n = n_f$.

   a): Trovare il minimo valore di $\Delta n = n_i - n_f$ perché il fotone possa ionizzare un atomo di idrogeno preparato nel suo stato fondamentale.

   b): Ripetere il conto nel caso in cui l'atomo di idrogeno sia stato preparato nel primo stato eccitato.

2. Il fotone emesso dall'oscillatore armonico del problema precedente viene fatto incidere su di un metallo con potenziale di estrazione $A = 4\mathrm{eV}$.

   a): Trovare il minimo valore di Δn al di sopra del quale si ha fotoemissione.

   b): Determinare come varia la velocità del fotoelettrone emesso al variare di Δn.

3. Una particella quantistica in una dimensione si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = \begin{cases} c\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) & \text{per } -a \le x \le a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   a): Dire qual è il valor medio della coordinata su tale stato, $\langle \hat{x} \rangle$.

   b): Dire qual è (o quali sono) il valore più probabile ottenibile in una misura della coordinata stessa.

4. (Facoltativo): Calcolare la costante di normalizzazione c ed il valor medio di $\hat{x}^2$ per la funzione d'onda del punto precedente.

Parte seconda

Si consideri una particella in una buca monodimensionale infinita definita da $0 \leq x \leq a$. Si supponga che, al tempo $t = 0$, la particella sia preparata nello stato descritto dalla funzione d'onda $\Psi_0(x)$, data da

$$\Psi_0(x) = c \left\{ \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + 3 \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \right\}$$

1. Determinare la corretta normalizzazione di $\Psi_0(x)$ (c);
2. Trovare lo stato del sistema al tempo t, $\Psi(x;t)$;
3. Dire qual è la probabilità che, al tempo $t_1 > 0$, una misura dell'energia dia un valore $> \hbar^2/ma^2$.
4. (Facoltativo): Calcolare la probabilità che, al tempo t, la particella si trovi nella metà buca definita da $a/2 \leq x \leq a$.

Nota bene: Gli autovalori dell'energia per la buca di potenziale infinita in una dimensione sono dati da

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2ma^2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad .$$

Le corrispondenti autofunzioni sono date da

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left[\frac{\pi n x}{a}\right] \quad .$$

Prima prova di recupero: Introduzione alla Fisica Quantistica

24 Luglio 2007

Parte prima

1. Un fascio di fotoni, tutti di lunghezza d'onda λ_i, viene fatto collidere con elettroni in quiete.

   a): Sapendo che i fotoni rilevati ad angolo di diffusione $\varphi = \pi/2$ hanno lunghezza d'onda $\lambda_f^{(1)} = 1.30 \times 10^{-11}$m, calcolare λ_i.

   b): Calcolare la lunghezza d'onda finale dei fotoni diffusi a $\varphi = 0$ ed a $\varphi = \pi$.

2. Un atomo di idrogeno eccitato in uno stato con numero quantico n_i, con $n_i > 2$, si diseccita per emissione di un fotone, raggiungendo lo stato con $n_f = 2$.

   a): Trovare qual è il valore minimo di n_i perché il fotone emesso possa determinare fotoemissione in un metallo con potenziale di estrazione $A = 2.2$eV.

   b): Calcolare l'energia cinetica del corrispondente fotoelettrone emesso.

3. Una particella quantistica in una dimensione si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

   $$\psi(x) = cxe^{-\frac{x^2}{2\Delta^2}}$$

   con $\Delta > 0$.

   a): Dire qual è il valor medio della coordinata su tale stato, $\langle \hat{x} \rangle$.

   b): Dire qual è (o quali sono) il valore più probabile ottenibile in una misura della coordinata stessa.

4. (Facoltativo): Calcolare la costante di normalizzazione c ed il valor medio di $\hat{x}^2$ per la funzione d'onda del punto precedente.

Parte seconda

Si consideri un oscillatore armonico quantistico di Hamiltoniana:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema sia preparato nello stato descritto dalla funzione d'onda $\Psi_0(x)$, data da:

$$\Psi_0(x) = c(1 + 2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

1. Determinare la corretta normalizzazione di $\Psi_0(x)$ (c);
2. Trovare lo stato del sistema al tempo t, $\Psi(x,t)$;
3. Trovare il valor medio dell'energia, $\langle E \rangle$;
4. Dire qual è la probabilità che, al tempo $t_1 > 0$, il risultato di una misura dell'energia dia $\hbar\omega/2$.
5. (Facoltativo) Determinare il valor medio di $\hat{x}$ su $\Psi(x,t)$.

Nota bene: le autofunzioni dell'Hamiltoniana di un oscillatore armonico corrispondenti ad $n = 0, 1, 2$ sono rispettivamente date da:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad ; \quad \psi_1(x) = \sqrt{2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left[2\frac{m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right] e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

Prova scritta d'esame: Introduzione alla Fisica Quantistica

27 Giugno 2007

Parte prima

1. (a) Un metallo con potenziale di estrazione $A = 4$ eV viene investito da luce di lunghezza d'onda λ, producendo effetto fotoelettrico. Determinare, in funzione di λ, l'energia dei fotoelettroni emessi.

   (b) Calcolare l'energia necessaria per produrre la transizione di un atomo di idrogeno dallo stato fondamentale, n=1, al primo stato eccitato, n=2.

   (c) I fotoelettroni di cui al punto (a) vengono fatti collidere con atomi di idrogeno nel loro stato fondamentale. Assumendo che ciascun fotoelettrone possa cedere tutta la propria energia all'atomo, trovare il valore di soglia di λ, λ_S, al di sotto del quale i fotoelettroni possano eccitare una transizione degli atomi di idrogeno al primo stato eccitato (cioè, $n = 1 \to n = 2$). **Nota bene**: si usino le formule non relativistiche.

2. Un oscillatore armonico quantistico di frequenza ν può trovarsi in livelli energetici stazionari con energia $E_n = h\nu(n + 1/2)$, $n = 0, 1, 2, ...$ Si consideri un oscillatore di frequenza $\nu = 2.4 \times 10^{14}$ Hz, preparato in uno stato eccitato E_m.

   (a) Se tale oscillatore effettua una transizione allo stato fondamentale ($m = 0$) accompagnata dall'emissione di un fotone, determinare in funzione di m qual è l'energia del fotone emesso.

   (b) Se il fotone emesso viene assorbito da un atomo di idrogeno che si trova nel suo stato fondamentale, quale deve essere il valore minimo di m perché l'atomo in questione possa essere ionizzato?

3. Una particella quantistica in una dimensione si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda
$$\psi(x) = C\left[e^{-\frac{(x-a)^2}{2\Delta^2}} + e^{-\frac{(x+a)^2}{2\Delta^2}}\right]$$
   con $a, \Delta > 0$.

   Tracciare qualitativamente il grafico di $\psi(x)/C$.

   Dire qual è il valor medio della coordinata su tale stato, $\langle\hat{x}\rangle$, e stimare quali sono i valori più probabili che si possano ottenere in una misura della coordinata stessa.

4. (Facoltativo): Calcolare la costante di normalizzazione C ed il valor medio di $\hat{x}^2$ per la funzione d'onda del punto precedente.

Parte seconda

Si consideri una particella in una buca monodimensionale infinita definita da $0 \leq x \leq a$. Si supponga che, al tempo $t = 0$, la particella sia preparata nello stato descritto dalla funzione d'onda $\Psi(x; t = 0)$, data da

$$\Psi(x; t = 0) = \begin{cases} C \left[\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \sqrt{2}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right] & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

1. Determinare la corretta normalizzazione, C, di $\Psi(x; t = 0)$.

2. Trovare lo stato del sistema al tempo t, $\Psi(x; t)$.

3. Dire qual è la probabilità che, al tempo $t_1 > 0$, una misura dell'energia dia un valore $< \hbar^2/ma^2$.

4. (Facoltativo): Calcolare il valor medio di $\hat{x}$ sullo stato descritto dalla funzione d'onda $\Psi(x, t)$.

Nota bene: Gli autovalori dell'energia per la buca di potenziale infinita in una dimensione sono dati da

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2ma^2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad .$$

Le corrispondenti autofunzioni sono date da

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Appello straordinario:
Introduzione alla Fisica Quantistica

28 Novembre 2006

Parte prima

1. Si vogliono rivelare i fotoni costituenti luce di lunghezza d'onda $\lambda = 1.40 \times 10^{-10}$ m tramite effetto Compton, inviando la radiazione luminosa contro un gas di particelle cariche. Avendo a disposizione elettroni, muoni (di massa m_μ, pari a 206 volte la massa dell'elettrone) e protoni (di massa m_p, pari a 1840 volte la massa dell'elettrone), quale tipo di particelle bersaglio risulta più conveniente usare? Discutere criticamente la scelta.

2. Un atomo di idrogeno ha energia 12.5 eV, misurata rispetto al suo stato fondamentale. Tale atomo può diseccitarsi per emissione di fotoni. Trovare su quali lunghezze d'onda possono essere emessi tali fotoni.

3. Una particella quantistica in una dimensione si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

   $$\psi(x) = c\, e^{-\frac{x^2}{2\Delta^2}}$$

   All'istante $t = 0$ tale particella viene fatta incidere su di un filtro che esclude tutte le configurazioni determinate da $x < 0$.

   Dire qual è la funzione d'onda (normalizzata) della particella immediatamente dopo il "filtraggio" e calcolare il valor medio dell'impulso $\hat{p}$ prima e dopo. Commentare concisamente il risultato ottenuto.

Parte seconda

Si consideri una particella in una buca monodimensionale infinita definita da $0 \leq x \leq a$. Si supponga che, al tempo $t = 0$, la particella sia preparata nello stato descritto dalla funzione d'onda $\Psi_0(x)$ che è pari a 0 per $0 \leq x \leq a/3$ e per $2a/3 \leq x \leq a$, mentre $\Psi_0(x) = c$ per $a/3 \leq x \leq 2a/3$:

1. Determinare la corretta normalizzazione di $\Psi_0(x)$ (c);
2. Trovare i coefficienti di $\Psi_0(x)$ nel sistema delle autofunzioni dell'Hamiltoniana, $\psi_n(x)$;
3. Trovare lo stato del sistema al tempo t, $\Psi(x;t)$;
4. Dire qual è la probabilità che, al tempo $t_1 > 0$, una misura dell'energia dia il minimo valore possibile.

Nota bene: Gli autovalori dell'energia per la buca di potenziale infinita in una dimensione sono dati da

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2ma^2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad .$$

Le corrispondenti autofunzioni sono date da

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left[\frac{\pi n x}{a}\right] \quad ,$$

per $0 \leq x \leq a$, mentre sono nulle altrimenti.

Prova scritta d'esame: Introduzione alla Fisica Quantistica

25 Luglio 2006

Parte prima

1. Un dispositivo sperimentale per l'effetto fotoelettrico è caratterizzato da una superficie metallica costituita da un parallelo di tre lamine metalliche con potenziali di estrazione rispettivamente dati da $A_1 = 2.0$ eV, $A_2 = 2.2$ eV, $A_3 = 2.4$ eV. Gli elettroni vengono rallentati da un potenziale frenante V =2 V prima di essere rilevati come corrente di fotoemissione. Discutere (qualitativamente: si tracci un grafico) l'andamento della corrente di fotoemissione che viene rilevata al variare della frequenza della radiazione incidente nell'intervallo ν_0, ν_1, con $\nu_0 = 4.9 \times 10^{14}$ Hz e $\nu_1 = 11.8 \times 10^{14}$ Hz.

2. Usando il principio di indeterminazione si stimi l'energia di punto zero della particella descritta dall'Hamiltoniana monodimensionale

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + A\hat{x}^4$$

(**nota bene**: si usi la disuguaglianza

$$\langle (\Delta \hat{x})^4 \rangle \geq (\langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle)^2$$

dove $\langle \ldots \rangle$ indica il valor medio.)

3. Una particella quantistica in una dimensione si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = c\, e^{-\alpha|x|}$$

con $\alpha > 0$. All'istante $t = 0$ tale particella viene fatta incidere su di un filtro che esclude tutte le configurazioni determinate da $x < x_0$, con $x_0 > 0$.

Dire qual è la funzione d'onda (normalizzata) della particella immediatamente dopo il "filtraggio" e calcolare il valor medio di $\hat{x}$ al variare di x_0.

Parte seconda

Si consideri una particella in una buca monodimensionale infinita definita da $0 \leq x \leq a$. Si supponga che, al tempo $t = 0$, la particella sia preparata nello stato descritto dalla funzione d'onda $\Psi_0(x)$ che è pari a c per $0 \leq x \leq a/3$ e per $2a/3 \leq x \leq a$, mentre $\Psi_0(x) = 0$ altrimenti:

1. Determinare la corretta normalizzazione di $\Psi_0(x)$ (c);
2. Trovare i coefficienti di $\Psi_0(x)$ nel sistema delle autofunzioni dell'Hamiltoniana, $\psi_n(x)$;
3. Trovare lo stato del sistema al tempo t, $\Psi(x; t)$;
4. Dire qual è la probabilità che, al tempo $t_1 > 0$, una misura dell'energia dia un valore compreso tra $\hbar^2/ma^2$ e $10\hbar^2/ma^2$.

Nota bene: Gli autovalori dell'energia per la buca di potenziale infinita in una dimensione sono dati da

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2ma^2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad .$$

Le corrispondenti autofunzioni sono date da

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left[\frac{\pi n x}{a}\right] \quad ,$$

per $0 \leq x \leq a$, mentre sono nulle altrimenti.

Prova scritta d'esame:
Introduzione alla Fisica Quantistica

30 Giugno 2006

Parte prima

1. Si considerino i seguenti tre processi di emissione:

   (a) Un atomo di idrogeno ($Z = 1$) si diseccita transendo dal livello con $n = 2$ al livello con $n = 1$;

   (b) Uno ione He^+ ($Z = 2$) si diseccita transendo dal livello con $n = 4$ al livello con $n = 3$;

   (c) Uno ione Li^{++} ($Z = 3$) si diseccita transendo dal livello con $n = 6$ al livello con $n = 5$.

   Dire in quale delle tre transizioni viene emesso il fotone con la massima energia.

   Supposto che, con un fascio di tali fotoni, si irraggi per un tempo $t = 1$ s una lamina sottile, di massa $m = 1$ g e di superficie $S = 1\ \mathrm{dm}^2$, trovare la velocità acquisita dalla particella, se il numero di fotoni che incidono per unità di tempo e di superficie è $dN_\gamma/dt = 10^{26}$ fotoni/(s m^2).

2. Si supponga di irraggiare un gas di ciascuna delle tre specie elencate al punto precedente con luce di lunghezza d'onda λ. Se l'esperimento avviene a temperatura ambiente, si può assumere che i vari atomi (ioni) siano nello stato elettronico fondamentale. Trovare, in ciascuno dei tre casi, il valore massimo che λ può avere per dar luogo ad assorbimento.

3. Siano date le funzioni d'onda

$$\psi_\pm(x) = c_\pm [e^{-\frac{(x-1)^2}{2\Delta^2}} \pm e^{-\frac{(x+1)^2}{2\Delta^2}}] \quad .$$

   Normalizzare le due funzioni d'onda e calcolare, per ciascuna delle due, $\bar{x}_\pm = \langle \hat{x} \rangle_\pm$, dove $\langle \ldots \rangle$ denota il calcolo della media sullo stato descritto dalla relativa funzione d'onda. Dire qual è la densità di probabilità corrispondente al valore della posizione $\bar{x}_\pm$ in ciascuno dei due casi.

Parte seconda

Si consideri un oscillatore armonico quantistico di Hamiltoniana:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema sia preparato nello stato descritto dalla funzione d'onda $\Psi_0(x)$, data da:

$$\Psi_0(x) = cx^2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

1. Determinare la corretta normalizzazione di $\Psi_0(x)$ (c);
2. Trovare lo stato del sistema al tempo t, $\Psi(x,t)$;
3. Trovare il valor medio dell'energia, $\langle E \rangle$;
4. Dire qual è la probabilità che, al tempo $t_1 > 0$, il risultato di una misura dell'energia dia $\hbar\omega/2$.
5. Determinare il valor medio dell'energia cinetica e dell'energia potenziale su $\Psi(x,t)$.

Nota bene: le autofunzioni dell'Hamiltoniana di un oscillatore armonico corrispondenti ad $n = 0, 1, 2$ sono rispettivamente date da:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad ; \quad \psi_1(x) = \sqrt{2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left[2\frac{m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right] e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

Prova d'esame per il corso di Introduzione alla Fisica Quantistica

21 Marzo 2006

- **Problema 1 [Punteggio max: 15 punti]**

  1. Si consideri un pendolo semplice, costituito da una particella di massa $m = 1$g che oscilla sospesa ad un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza $\ell = 1$m. L'angolo di elongazione massima è $\theta_M = 0.02\pi$ radianti. Per tale valore di θ_M vale l'approssimazione di piccole oscillazioni, per cui il pendolo semplice si può trattare come un oscillatore armonico. Per i valori dati dei parametri del problema, si valuti il numero quantico n dell'oscillatore in questione.

     Nota bene: si usi come valore dell'accelerazione di gravità $g = 9.81\text{m/s}^2$. Si ponga $\cos(\theta_M) = 0.9999994$.

  2. Un oscillatore armonico di frequenza $\nu = 2 \times 10^{14}$Hz emette un fotone, diseccitandosi dal livello con $n = n_0$ al livello con $n = 0$. Determinare il valore minimo che deve avere n_0 affinché il fotone emesso sia in grado di eccitare un atomo di idrogeno dallo stato fondamentale al primo livello elettronico eccitato.

  3. Un elettrone, un muone ed un protone sono racchiusi in scatole monodimensionali di dimensione rispettivamente pari a d_e, d_μ e d_p. Sapendo che la massa del muone è circa 206 volte quella dell'elettrone e quella del protone è circa 1840 volte quella dell'elettrone, stimare il valore dei rapporti d_e/d_μ e d_e/d_p, sapendo che misure dell'energia cinetica media delle tre particelle forniscono lo stesso valore, E.

- **Problema 2 [Punteggio max: 15 punti]:**

Una particella quantistica è vincolata a muoversi nella buca monodimensionale definita da $0 \leq x \leq a$. Lo stato della particella al tempo $t = 0$ è descritto dalla funzione d'onda $\Psi_0(x)$, data da

$$\Psi_0(x) = c \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\left[i + 2\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right]$$

1. Determinare il coefficiente di normalizzazione c.
2. Trovare i possibili risultati di una misura dell'energia sullo stato definito da $\Psi_0(x)$, con le relative probabilità.
3. Trovare lo stato del sistema al tempo $t > 0$, $\Psi(x, t)$.
4. Determinare la probabilità che al tempo $t > 0$ una misura della posizione dia un risultato $\bar{x}$ compreso tra 0 ed $a/2$.

Nota bene: le autofunzioni dell'Hamiltoniana di una particella libera in una buca di potenziale $0 \leq x \leq a$ sono date da

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

I corrispondenti autovalori dell'energia sono dati da

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2}$$

Prova d'esame per il corso di Introduzione alla Fisica Quantistica

09 Novembre 2005

- **Problema 1 [Punteggio max: 15 punti]**

  1. Una particella con la carica dell'elettrone parte da ferma e viene accelerata passando attraverso una differenza di potenziale $\Delta V = 2$ V. Successivamente, essa collide con un atomo di idrogeno. Supposto che l'elettrone dell'atomo di idrogeno si trovi in uno stato di energia $E_n = -(h\bar{R}/n^2)$, trovare il valore minimo che deve avere n affinché la particella proiettile possa ionizzare l'atomo.

  2. Un fascio di elettroni con velocità $v = 10^6$ m/s incide su di una parete con un'apertura circolare di diametro d. Trovare il valore minimo di d per cui l'angolo θ di apertura del fascio dopo la collisione sia $\leq 0.2\pi$ radianti.

     Nota bene: si usi l'approssimazione di fascio indeflesso, ossia, si trascuri la variazione dell'impulso nella direzione del moto. Si usi, inoltre, l'approssimazione di piccoli angoli, ossia, $\sin(\theta) \approx \theta$.

  3. Una particella quantistica di massa m è chiusa in una scatola rettangolare i cui lati misurano rispettivamente a e b. Stimare l'energia dello stato fondamentale della particella. Supposto fissato il perimetro della scatola (ossia, supposta fissata la somma $p = a + b$), trovare la relazione che deve intercorrere tra a e b perché l'energia sia la minima possibile.

- **Problema 2 [Punteggio max: 15 punti]:**

Si consideri un oscillatore armonico quantistico di Hamiltoniana:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema sia preparato nello stato descritto dalla funzione d'onda $\Psi_0(x)$, data da:

$$\Psi_0(x) = c_0\psi_0(x) + c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x)$$

dove ψ_0, ψ_1, ψ_2 sono le funzioni sotto riportate.

1. Determinare i coefficienti c_0, c_1, c_2 sapendo che:
   (a) Essi sono tutti e tre positivi o nulli;
   (b) $\Psi(x)$ è una funzione a parità definita e, in particolare, $\Psi(-x) = \Psi(x)$;
   (c) Il valor medio dell'energia a $t = 0$ è pari ad $\hbar\omega$.
2. Trovare lo stato del sistema al tempo $t > 0$, $\Psi(x, t)$.
3. Determinare la probabilità che al tempo $t > 0$ una misura dell'energia dia $\hbar\omega/2$.

   Nota bene: le autofunzioni dell'Hamiltoniana di un oscillatore armonico corrispondenti ad $n = 0, 1, 2$ sono rispettivamente date da:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad ; \quad \psi_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{3}{4}} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left[2\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right) x^2 - 1\right] e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

Prova d'esame per il corso di Introduzione alla Fisica Quantistica

Docente: Prof. A. Papa; esercitatore: Dr. D. Giuliano

26 Settembre 2005

- **Problema 1 [Punteggio max: 15 punti]**

  1. Un fotone di frequenza ν genera fotoemissione in un metallo con potenziale di estrazione $A = 2$ eV. Trovare il valore minimo di ν perché il fotoelettrone emesso possa superare una differenza di potenziale $\Delta V = 2$ V.
  2. Un fotone di frequenza $\nu = 10^{16}$ Hz incide su di un atomo di idrogeno nel suo stato fondamentale. Supposto che il fotone venga assorbito dall'elettrone ed ionizzi l'atomo, trovare la velocità dello ione dopo l'emissione (si approssimi la massa dello ione con $M \approx 2000\, m_e$, dove m_e è la massa dell'elettrone).
  3. Una particella quantistica di massa m è chiusa in una scatola rettangolare i cui lati misurano rispetivamente a e b. Supposto che la particella non sia soggetta ad altri potenziali, stimarne l'energia cinetica $T = [(p_x)^2 + (p_y)^2]/2m$.

- **Problema 2 [Punteggio max: 15 punti]:**

Una particella quantistica di massa m è vincolata a muoversi in una scatola monodimensionale di lunghezza a, vale a dire, il suo moto è limitato a $0 \leq x \leq a$. Siano date le funzioni d'onda:

$$\Psi(x) = c\left[\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{a}x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\Phi(x) = c'\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$$

$$\chi(x) = c"\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

1. Individuare quella delle tre che è una funzione d'onda ammissibile per il problema al tempo $t = 0$ e spiegare la scelta. Successivamente, trovare la normalizzazione corretta della funzione d'onda.
2. Trovare lo stato del sistema al tempo $t > 0$, $\Psi(x, t)$.
3. Determinare, in funzione del tempo, il valor medio della coordinata x sullo stato $\Psi(x, t)$.
4. Dire qual è la probabilità che, al tempo t, la particella si trovi tra $x = 0$ ed $x = a/3$.

Nota bene: le autofunzioni dell'Hamiltoniana di una particella libera in una buca di potenziale $0 \leq x \leq a$ sono date da

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

I corrispondenti autovalori dell'energia sono dati da

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2}$$

Prova d'esame per il corso di Introduzione alla Fisica Quantistica

Docente: Prof. A. Papa; esercitatore: Dr. D. Giuliano

18 Luglio 2005

- **Problema 1 [Punteggio max: 15 punti]**

  1. Un fotone di lunghezza d'onda $\lambda = 10^{-11}$ m subisce una collisione Compton ad angolo di diffusione $\varphi = \pi$ contro un elettrone (di massa m_e), un muone (di massa $m_\mu = 206 m_e$) ed un protone (di massa $m_p = 1840 m_e$). Calcolare la variazione di lunghezza d'onda del fotone nei tre casi, ricordando la formula per la lunghezza d'onda Compton di una particella di massa m, $\lambda_c = h/(mc)$.
  2. Un fotone di frequenza $\nu = 4 \times 10^{15}$ Hz incide su di un atomo di idrogeno nel suo stato fondamentale. Tale fotone può dar luogo all'emissione dell'elettrone da parte dell'atomo? Nel caso di risposta positiva, calcolare l'energia cinetica con cui viene emesso tale elettrone e quanto deve valere, al minimo, una differenza di potenziale ΔV che arresti sicuramente l'elettrone emesso.
  3. Una particella quantistica di massa m è chiusa in una scatola cubica di spigolo a. Stimarne l'energia cinetica $T = [(p_x)^2 + (p_y)^2 + (p_z)^2]/2m$, dove p_x, p_y, p_z sono le tre componenti dell'impulso della particella in questione.

- **Problema 2 [Punteggio max: 15 punti]:**

Si consideri un oscillatore armonico quantistico di Hamiltoniana:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema sia preparato nello stato descritto dalla funzione d'onda $\Psi_0(x)$, data da:

$$\Psi_0(x) = c\left[1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right] e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

1. Determinare la corretta normalizzazione di $\Psi_0(x)$ (c).
2. Trovare lo stato del sistema al tempo $t > 0$, $\Psi(x,t)$.
3. Determinare, in funzione del tempo, il valor medio della coordinata x sullo stato $\Psi(x,t)$.
4. Dire qual è la probabilità che, al tempo t, il sistema si trovi in uno stato eccitato (vale a dire, con $n \geq 1$).

Nota bene: le autofunzioni dell'Hamiltoniana di un oscillatore armonico corrispondenti ad $n = 0, 1, 2$ sono rispettivamente date da:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad ; \quad \psi_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{2\frac{m\omega}{\hbar}}x\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left[2\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)x^2 - 1\right] e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

Prova d'esame per il corso di Introduzione alla Fisica Quantistica

Docente: Prof. A. Papa; esercitatore: Dr. D. Giuliano

28 Giugno 2005

- ## Problema 1 [Punteggio max: 15 punti]

1. Si supponga di avere a disposizione quattro metalli, con lavoro di estrazione A pari ad 1.0, 2.0, 3.0, 4.0 eV, rispettivamente. Si supponga di irraggiare tali metalli con fotoni emessi da un oscillatore armonico di frequenza $\nu = 3.66 \times 10^{14}$ Hz nel diseccitarsi dal livello con numero quantico $n+1$ a quello con numero quantico n. Dire quali(e) dei metalli potranno essere ionizzati da tali fotoni.
2. Si valuti la temperatura minima che deve avere un corpo nero in modo che, al picco di emissione, emetta fotoni a lunghezza d'onda capace di ionizzare ciascuno dei metalli di cui al punto precedente.
3. Si supponga di bombardare una parete con un foro circolare, di dimensione d, con fasci di particelle propagantesi in direzione ortogonale alla parete stessa. In particolare, si usino fasci di elettroni (di massa m_e), di muoni (di massa $m_\mu = 206 m_e$) e di protoni (di massa $m_p = 1840 m_e$). Nel passaggio attraverso il foro, l'impulso di ciascuno dei fasci subirà, a causa del principio di indeterminazione, una dispersione $\Delta p_\perp$ ortogonale alla direzione del moto. Si noti che $\Delta p_\perp$ non dipende dall'impulso della particella incidente. La dispersione del fascio viene misurata dall'angolo θ, tale che $\sin\theta = \Delta p_\perp / p_0$, dove p_0 è l'impulso iniziale. Si calcoli il rapporto tra gli angoli di dispersione nel caso in cui i fasci abbiano tutti la stessa energia iniziale E_0 (e, chiaramente, impulso iniziale p_0 diverso da fascio a fascio), considerando piccole dispersioni (per cui $\sin\theta \approx \theta$).

- **Problema 2 [Punteggio max: 15 punti]:**

Si consideri una buca di potenziale infinita unidimensionale di larghezza a. Una particella quantistica in tale buca è descritta, al tempo $t = 0$, dalla funzione d'onda

$$\Psi_0(x) = c\left[\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)\right] .$$

1. Determinare la corretta normalizzazione di $\Psi_0(x)$, c.
2. Trovare lo stato del sistema al tempo $t > 0$, $\Psi(x,t)$.
3. Determinare, in funzione del tempo, il valor medio dell'energia dello stato $\Psi(x,t)$.
4. Supposto che, al tempo t_1, una misura dell'energia dia come risultato $\hbar^2\pi^2/(2ma^2)$, determinare la probabilità che, una misura effettuata in sequenza, al tempo $t_2 > t_1$, sullo stesso sistema, dia il medesimo valore dell'energia.

Nota bene: le autofunzioni della buca di potenziale descritta nella traccia sono date da:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left[\frac{n\pi x}{a}\right] & \text{per } 0 \le x \le a\,; \\ 0 & \text{altrimenti}\,; \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3\ldots$$

Gli autovalori corrispondenti sono

$$E_n = n^2\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} .$$

Si ricordi anche che per le autofunzioni $\psi_n(x)$ vale la condizione di ortonormalità

$$\int_0^a \left[\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right]\left[\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\right] dx = \delta_{nm}$$

Prova d'esame per il corso di Introduzione alla Fisica Quantistica

Docente: Dr. A. Papa; esercitatore: Dr. D. Giuliano

11 Gennaio 2005

- **Problema 1 [Punteggio max: 15 punti]**

  1. Un atomo di idrogeno in quiete emette un fotone diseccitandosi dal primo livello energetico (E_1) allo stato fondamentale (E_0).

     Trovare la velocità dell'atomo dopo l'emissione del fotone.
  2. Dire se il fotone in questione può indurre effetto fotoelettrico in un metallo con potenziale di estrazione $W = 10$ eV.
  3. Dire quale dovrebbe essere la temperatura di un corpo nero che, in corrispondenza del proprio picco di emissione, emettesse radiazione con lunghezza d'onda uguale a quella del fotone emesso nella transizione del punto 1.

- **Problema 2 [Punteggio max: 15 punti]:**

Si consideri una buca di potenziale infinita unidimensionale di larghezza a. Una particella quantistica in tale buca è descritta, al tempo $t = 0$, dalla funzione d'onda

$$\Psi_0(x) = c \sin\left[\frac{2\pi x}{a}\right]\left\{1 + \cos\left[\frac{2\pi x}{a}\right]\right\}$$

1. Determinare la corretta normalizzazione di $\Psi_0(x)$ (c).
2. Trovare lo stato del sistema al tempo $t > 0$, $\Psi(x, t)$.
3. Determinare, in funzione del tempo, la probabilità che la particella si trovi nella regione di spazio $0 \leq x \leq a/2$.
4. Determinare i possibili valori che si possono ottenere da una misura di impulso sullo stato $\Psi_0(x)$.

Nota bene: le autofunzioni della buca di potenziale descritta nella traccia sono date da:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left[\frac{n\pi x}{a}\right] \qquad \text{per } 0 \leq x \leq a \ \ ; \ \ \psi_n(x) = 0 \text{ altrove}$$

Prova d'esame per il corso di Introduzione alla Fisica Quantistica

Docente: Dr. A. Papa; esercitatore: Dr. D. Giuliano

23 Settembre 2004

- **Problema 1 [Punteggio max: 15 punti]**

  1. Si supponga di voler realizzare un'immagine di un oggetto di dimensione $\ell \sim 10^{-7}$ m, avendo a disposizione un fascio di raggi X, un fascio di elettroni ed un fascio di protoni, tutti di energia $E = 10^3$ eV.

     Quale dei tre fasci risulterà opportuno usare?

  2. Usando il principio di indeterminazione, stimare l'energia cinetica media di un elettrone e di un protone confinati in una buca di potenziale monodimensionale di dimensione $d \sim 10^{-10}$ m.

  3. Un corpo portato all'incandescenza ha un picco di emissione sul rosso (lunghezza d'onda $\lambda_R \sim 7.5 \times 10^{-7}$ m). Riscaldato ulteriormente il corpo, il picco di emissione si sposta sul violetto (lunghezza d'onda $\lambda_V \sim 4.0 \times 10^{-7}$ m). Trovare la variazione di temperatura del corpo.

- **Problema 2 [Punteggio max: 15 punti]:**

Si consideri un oscillatore armonico quantistico di Hamiltoniana:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema sia preparato nello stato descritto dalla funzione d'onda $\Psi_0(x)$, data da:

$$\Psi_0(x) = c\left(1 + \frac{m\omega}{h}x^2\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

1. Determinare la corretta normalizzazione di $\Psi_0(x)$ (c).
2. Trovare lo stato del sistema al tempo $t > 0$, $\Psi(x,t)$.
3. Dire qual è la probabilità che, al tempo $t_1 > 0$, il risultato di una misura dell'energia sia $\hbar\omega/2$. Supposto che al tempo t_1 una misura dell'energia abbia dato come risultato $\hbar\omega/2$, dire qual è la probabilità che una misura dell'energia effettuata al tempo $t_2 > t_1$ dia come risultato $3\hbar\omega/2$.
4. Determinare valor medio di energia cinetica ed energia potenziale nello stato fondamentale dell'oscillatore armonico. Discutere brevemente il significato fisico del risultato.

Nota bene: le autofunzioni dell'Hamiltoniana di un oscillatore armonico corrispondenti ad $n = 0, 1, 2$ sono rispettivamente date da:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad ; \quad \psi_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{3}{4}} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left[2\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)x^2 - 1\right] e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

Prova d'esame per il corso di Introduzione alla Fisica Quantistica

Docente: Dr. A. Papa; esercitatore: Dr. D. Giuliano

23 Luglio 2004

- **Problema 1 [Punteggio max: 15 punti]**

  Si proietti luce su sodio metallico. La lunghezza d'onda di soglia per indurre fotoemissione è $\lambda_S = 680$nm.

  1. Determinare il lavoro di estrazione del metallo, A;
  2. Dare un limite superiore alla lunghezza d'onda della radiazione incidente sul metallo perché il fotoelettrone emesso possa indurre una transizione dallo stato con $n = 3$ allo stato con $n = 4$ in un atomo idrogenoide con numero atomico $Z = 2$.
  3. Si faccia incidere un elettrone di energia E_e ed un protone di energia E_p su di una fenditura circolare di diametro d perpendicolare alla loro traiettoria. Trovare la relazione tra E_e ed E_p affinché le figure di diffrazione siano eguali.

     Nota bene: ci si limiti al caso di particelle non relativistiche.

- **Problema 2 [Punteggio max: 15 punti]:**

  Si consideri una buca di potenziale infinita unidimensionale di larghezza a. Una particella quantistica in tale buca è descritta, al tempo $t = 0$, dalla funzione d'onda

$$\Psi_0(x) = c\left[\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]$$

  1. Determinare la corretta normalizzazione di $\Psi_0(x)$ (c).
  2. Trovare lo stato del sistema al tempo $t > 0$, $\Psi(x,t)$.
  3. Determinare, in funzione del tempo, il valor medio dell'impulso p sullo stato $\Psi(x,t)$.
  4. Determinare la probabilità che, al tempo t, la particella proceda verso destra.

  Nota bene: le autofunzioni della buca di potenziale descritta nella traccia sono date da:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left[\frac{n\pi x}{a}\right] & 0 \le x \le a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Prova d'esame per il corso di Introduzione alla Fisica Quantistica

Docente: Dr. A. Papa; esercitatore: Dr. D. Giuliano

2 Luglio 2004

- **Problema 1 [Punteggio max: 15 punti]**

  Si consideri una stella con temperatura superficiale $T_* = 4400$ K.

  1. Trovare lunghezza d'onda, modulo dell'impulso ed energia di un fotone emesso dalla stella alla lunghezza d'onda corrispondente al picco d'emissione.
  2. Dire se tale fotone può eccitare una transizione in un atomo d'idrogeno dal livello $n = 2$ al livello $n = 3$.
  3. Supposto che tale fotone collida contro un elettrone in quiete e venga diffuso con angolo $\varphi = \pi$, dire se è possibile che esso induca ancora la transizione discussa al punto precedente, anche dopo la collisione.

- **Problema 2 [Punteggio max: 15 punti]:**

Si consideri un oscillatore armonico quantistico di Hamiltoniana:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema sia preparato nello stato descritto dalla funzione d'onda $\Psi_0(x)$, data da:

$$\Psi_0(x) = c\left[1 + 3\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right] e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

1. Determinare la corretta normalizzazione di $\Psi_0(x)$ (c).
2. Trovare lo stato del sistema al tempo $t > 0$, $\Psi(x,t)$.
3. Determinare, in funzione del tempo, il valor medio della coordinata x sullo stato $\Psi(x,t)$. Discutere brevemente il significato fisico del risultato.
4. Dire qual è la probabilità che, al tempo $t_1 > 0$, il risultato di una misura dell'energia sia $\hbar\omega/2$. Supposto che al tempo t_1 una misura dell'energia abbia dato come risultato $\hbar\omega/2$, dire qual è la probabilità che una misura dell'energia effettuata al tempo $t_2 > t_1$ dia come risultato $3\hbar\omega/2$.
5. (**Facoltativo**) Trovare la probabilità $\mathcal{P}(t)$ che al tempo $t > 0$ il sistema si trovi nello stato $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_0(x) + \psi_1(x)]$, essendo ψ_0, ψ_1 le prime due autofunzioni dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico.

Nota bene: le autofunzioni dell'Hamiltoniana di un oscillatore armonico corrispondenti ad $n = 0, 1, 2$ sono rispettivamente date da:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad ; \quad \psi_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{3}{4}} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left[2\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)x^2 - 1\right] e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

Verifica intermedia per il corso di Introduzione alla Fisica Quantistica

Docente: Dr. A. Papa; esercitatore: Dr. D. Giuliano

14 Maggio 2004

- **Problema 1 [10 punti]:**

  È possibile creare atomi muonici in cui il muone, particella di carica pari a quella dell'elettrone e con massa $m_\mu = 207 m_e$, essendo m_e la massa dell'elettrone, sostituisce un elettrone nell'atomo stesso.

  Si supponga di realizzare un atomo di "idrogeno muonico". È possibile che il fotone emesso da tale atomo quando esso passa dal livello con $n = 9$ al livello con $n = 7$ abbia energia sufficiente per ionizzare un atomo di idrogeno "ordinario"? [Si consideri, in ambedue i casi, il protone in quiete].

- **Problema 2 [8 punti]:**

  Si faccia passare un fascio di elettroni attraverso una fenditura di dimensione $d = 10^{-6}$ m. Qual è l'indeterminazione sulla velocità degli elettroni? Quale sarebbe se le particelle fossero protoni?

- **Problema 3 [12 punti]:**

  Viene realizzato un esperimento di Franck-Hertz in cui il gas presente nel tubo è idrogeno atomico. Detto V il potenziale tra filamento e griglia, a partire da quale valore di eV si avrà la diminuzione di corrente nel tubo? Detto eV^* tale valore, discutere qualitativamente cosa succede per $eV > eV^*$.

Introduzione alla Fisica Quantistica, II prova di recupero

2 ottobre 2003

1. Quali sono la lunghezza d'onda minima e quella massima della luce emessa quando un atomo di idrogeno subisce una transizione da un livello $n > 2$ al livello $n = 2$ (righe di Balmer)?. [5 punti]

2. Si dispone di un fascio di raggi X, di un fascio di elettroni e di un fascio di protoni, tutti di energia pari a 1 keV. Quale fascio conviene usare se si vuole produrre una figura di diffrazione facendolo incidere su una fenditura circolare di raggio 10^{-7} cm? [7 punti]

3. Una particella di massa m è confinata da una buca di potenziale unidimensionale infinita di estremi $x = 0$ ed $x = a$. Essa si trova al tempo $t = 0$ in una sovrapposizione lineare dello stato fondamentale e del I stato eccitato.

   Si dimostri che la funzione d'onda normalizzata di questo stato può essere scritta nella forma

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}\Big(\psi_1(x) + \alpha\,\psi_2(x)\Big) ,$$

   dove α è una costante complessa. [3 punti]

   Si risponda alle seguenti domande, senza effettuare alcun calcolo e motivando opportunamente le risposte:

   a. la funzione d'onda $\psi(x,0)$ rappresenta uno stato ad energia definita? se sì, qual è questa energia? se no, quali sono i possibili risultati della misura dell'energia su questo stato?

   b. la funzione d'onda $\psi(x,0)$ ha parità definita per riflessione intorno all'asse $x = a/2$?

   c. qual è il valor medio dell'impulso su questo stato del sistema? [3 punti]

   Si determini poi il valore della costante α usando l'informazione che il valor medio dell'energia su $\psi(x,0)$ è $(E_1 + E_2)/2$ e quello della posizione è $a/2$, e si trovi

   i. la probabilità che una misura dell'energia dia ciascuno dei risultati possibili;

   ii. la funzione d'onda evoluta $\psi(x,t)$. [12 punti]

   La forma generale delle autofunzioni normalizzate dell'Hamiltoniana del sistema in questione è

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) & \text{per } 0 < x < a\,, \\ 0 & \text{altrove}\,, \end{cases}$$

   i corrispondenti autovalori sono

$$E_n = n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\,, \qquad\qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Introduzione alla Fisica Quantistica, I prova di recupero
28 luglio 2003

1. Il bario ha energia di estrazione pari a 2.24 eV. Quale sarà l'energia cinetica massima degli elettroni espulsi dal metallo se esso viene investito con luce di lunghezza d'onda 390 nm? Che velocità avranno? [5 punti]

2. Con quale velocità deve viaggiare un elettrone per avere una lunghezza d'onda di de Broglie di 10^{-8} cm? Con quale differenza di potenziale è necessario accelerarlo affinché raggiunga tale velocità? [5 punti]

3. Una particella di massa m è confinata da una buca di potenziale unidimensionale infinita di estremi $x = 0$ ed $x = a$. Essa si trova al tempo $t = 0$ nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x,0) = \begin{cases} C & \text{per } \frac{a}{4} < x < \frac{3a}{4} , \\ 0 & \text{altrove ,} \end{cases}$$

dove C è una costante.

Si risponda alle seguenti domande, senza effettuare alcun calcolo e motivando opportunamente le risposte:

a. qual è la probabilità che una misura di posizione sullo stato descritto da $\psi(x,0)$ dia un risultato compreso tra 0 ed $a/4$? e tra 0 ed $a/2$? e tra 0 e $3a/4$?

b. la funzione d'onda $\psi(x,0)$ rappresenta uno stato ad energia definita?

c. la funzione d'onda $\psi(x,0)$ ha parità definita per riflessione intorno all'asse $x = a/2$?

d. se si effettua una misura di energia sullo stato descritto da $\psi(x,0)$, con quale probabilità si otterrà il valore E_{124}?

e. qual è il valor medio dell'impulso su questo stato del sistema? [5 punti]

Dopo aver normalizzato la funzione d'onda, determinare:

i. la probabilità che una misura di energia sullo stato del sistema al tempo $t = 0$ dia come risultato un generico valore E_n, determinandone il valore numerico nei casi $n = 1$, 2 e 3;

ii. la funzione d'onda nello spazio degli impulsi $\phi(p)$ e la densità di probabilità di impulso;

iii. il valore dell'impulso che ha la massima probabilità di essere ottenuto in una misura;

iv. la funzione d'onda evoluta $\psi(x,t)$. [15 punti]

La forma generale delle autofunzioni normalizzate dell'Hamiltoniana del sistema in questione è

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) & \text{per } 0 < x < a , \\ 0 & \text{altrove ,} \end{cases}$$

i corrispondenti autovalori sono

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Introduzione alla Fisica Quantistica

Prova finale
4 luglio 2003

1. Un fotone di energia pari a 100 MeV urta contro un elettrone fermo. Determinare il valore massimo della perdita di energia del fotone e l'angolo di diffusione corrispondente.

[5 punti]

2. Qual è la velocità minima che deve possedere un elettrone affinché, urtando contro un atomo di idrogeno in quiete nello stato fondamentale, possa produrre una transizione al secondo livello eccitato?

[5 punti]

3. Una particella di massa m, soggetta ad un potenziale armonico unidimensionale con pulsazione ω, si trova al tempo $t = 0$ nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x, 0) = C\left(1 + \frac{x}{x_0}\right) e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}\ , \qquad\qquad x_0 \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\ .$$

Si risponda alle seguenti domande, senza effettuare alcun calcolo e motivando opportunamente le risposte:

a. la funzione d'onda $\psi(x, 0)$ ha parità definita?

b. rappresenta uno stato legato?

c. qual è il valor medio dell'impulso su questo stato del sistema?

d. quali sono i possibili risultati della misura dell'energia su questo stato?

e. è possibile individuare *a priori* un intervallo di valori entro cui è sicuramente compreso il valor medio dell'energia su questo stato?

[5 punti]

Dopo aver normalizzato la funzione d'onda, determinare:

i. le probabilità associate a ciascuno dei possibili risultati della misura dell'energia del sistema al tempo $t = 0$;

ii. il valor medio di posizione ed energia al tempo $t = 0$;

iii. la funzione d'onda evoluta $\psi(x, t)$;

iv. la densità di probabilità ad un generico istante t;

v. il valor medio di posizione, impulso ed energia ad un generico istante t.

[15 punti]

La forma generale delle autofunzioni normalizzate dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico è

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} H_n(\xi)\, e^{-\xi^2/2}\ , \qquad\qquad \xi \equiv \frac{x}{x_0}\ ,$$

con

$$H_0 = 1\ , \qquad H_1 = 2\xi\ , \qquad H_2 = 4\xi^2 - 2\ , \qquad H_3 = 8\xi^3 - 12\xi\ , \qquad \ldots$$

Introduzione alla Fisica Quantistica

Esercitazione guidata
15 maggio 2003

1. Sapendo che l'energia di estrazione A dell'argento è pari a circa 4.6 eV, determinare la minima frequenza dei fotoni di un fascio incidente su un foglio di argento necessaria per produrre emissione di elettroni.

2. Un fotone con energia pari a 10 keV urta contro un elettrone fermo e viene diffuso di 90° rispetto alla direzione incidente. Calcolare la lunghezza d'onda del fotone diffuso.

3. Una particella di massa m, vincolata a muoversi lungo una direzione, è confinata tra due estremi posti a distanza a. Come noto, questa situazione è schematizzabile con una buca di potenziale unidimensionale infinita.
   - Trovare quali sono i valori permessi di energia ed impulso per la particella, secondo la antica teoria dei quanti di Bohr.
   - Determinare le corrispondenti lunghezze d'onda di de Broglie.

4. Si immagini di ripetere l'esperimento di Franck-Hertz usando atomi di idrogeno invece che vapori di mercurio. Descrivere per quanto possibile quantitativamente come varia la corrente della placca anodica al variare della differenza di potenziale tra 0 e 12.5 V.

5. Si illustrino brevemente i concetti di pacchetto d'onde e di velocità di gruppo.

Introduzione alla Fisica Quantistica

II prova di recupero
26 settembre 2002

1. Calcolare energia, frequenza e lunghezza d'onda del fotone emesso in seguito alla transizione dal livello $n = 3$ al livello $n = 2$ dell'atomo di idrogeno.

[10 punti]

2. Si vuole effettuare un esperimento di diffrazione di elettroni attraverso una fenditura di dimensione 10^{-6} cm. A quale velocità si devono muovere gli elettroni del fascio incidente sulla fenditura se si vuole che la loro lunghezza d'onda di de Broglie sia uguale alle dimensioni della fenditura? Si tratta di elettroni relativistici?

[10 punti]

3. La funzione d'onda di una particella in una buca di potenziale unidimensionale infinita di estremi 0 ed a è data da $\psi(x) = Cx\sqrt{a-x}$. Dopo aver normalizzato la funzione d'onda,
   (a) calcolare la probabilità che la particella si trovi tra 0 ed $a/3$;
   (b) determinare il valore di x per cui è massima la densità di probabilità.

[10 punti]

Introduzione alla Fisica Quantistica

I prova di recupero
29 luglio 2002

1. Un fotone con energia pari a 10 keV urta contro un elettrone fermo e viene diffuso di 90° rispetto alla direzione incidente. Calcolare la lunghezza d'onda del fotone diffuso.

   [8 punti]

2. Sapendo che l'energia di estrazione A dell'argento è pari a circa 4.6 eV, determinare la minima frequenza dei fotoni di un fascio incidente su un foglio di argento necessaria per produrre emissione di elettroni. Se i fotoni incidenti hanno frequenza doppia di quella minima, qual è l'energia cinetica degli elettroni emessi?

   [10 punti]

3. La funzione d'onda di una particella in una buca di potenziale unidimensionale infinita di estremi 0 ed a è data da
   $$\psi(x) = Cx^2(a-x) \ ,$$
   dove C è una costante. Dopo aver normalizzato la funzione d'onda, si calcolino i valori medi di x, p, x^2 e p^2.

   Facoltativo: si verifichi la relazione di indeterminazione di Heisenberg.

   Facoltativo: la particella nello stato ψ ha energia definita?

   [12 punti]

Introduzione alla Fisica Quantistica

Prova scritta di fine modulo
2 luglio 2002

1. Usando la relazione di indeterminazione, si stimi un limite inferiore per l'energia di una particella in una buca di potenziale unidimensionale di profondità infinita e si confronti con il livello fondamentale del sistema ottenuto risolvendo l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo. [10 punti]

2. Date le funzioni d'onda

$$
\begin{aligned}
\psi_1(x) &= N_1 e^{-x^2/a^2} && -\infty < x < \infty \\
\psi_2(x) &= \begin{cases} N_2 \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) & 0 < x < a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \\
\psi_3(x) &= \begin{cases} N_3(x-a) & 0 < x < a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \\
\psi_4(x) &= \begin{cases} N_4\, x(x-a) & 0 < x < a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}
\end{aligned}
$$

si dica, <u>giustificando ogni risposta</u>:

(a) quali di queste sono possibili funzioni d'onda di una particella in una buca di potenziale unidimensionale infinita di estremi 0 ed a; [5 punti]

(b) quali, se ce ne sono, delle funzioni d'onda di cui al punto (a) sono relative a stati con energia definita ed a quale energia corrispondono. [5 punti]

Scegliendo poi una delle funzioni d'onda di cui alla risposta (a), si calcolino i valori medi di x, p e dell'energia cinetica $p^2/(2m)$ e si commentino i risultati ottenuti. [10 punti]